SÄTZE VOM FREDHOLM TYP UND VERZWEIGUNGS-PROBLEME FÜR NICHTLINEARE OPERATOREN MIT ANWENDUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

HORST WEBER
aus Leverkusen

DÜSSELDORF 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536504_0046

SÄTZE VOM FREDHOLM TYP UND VERZWEIGUNGS-PROBLEME FÜR NICHTLINEARE OPERATOREN MIT ANWENDUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

HORST WEBER
aus Leverkusen

DÜSSELDORF 1981

1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Walter Petry
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Boro Döring
Tag der Einreichung:	25. September 1980
Tag der mündlichen Prüfung:	11. Dezember 1981

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG 1

A. Problemstellung 1

B. Bekannte Lösungen 3

C. Inhaltsübersicht 9

D. Bezeichnungsweisen und Grundbegriffe 12

KAPITEL 1: SURJEKTIVITÄT UND ASYMPTOTISCHE VERZWEIGUNGSPUNKTE 16

§ 1. φ-beschränkte Abbildungen 17

§ 2. φ-asymptotisch beschränkte Abbildungen 24

§ 3. Die Funktion d 39

§ 4. Das φ-asymptotische Spektrum 47

§ 5. Ein Existenzsatz 64

§ 6. Sätze vom Fredholm Typ 72

§ 7. Asymptotische Verzweigungspunkte 90

§ 7.1. Definition und Charakterisierung 91

§ 7.2. Existenz 95

§ 8. Anwendungen: Nichtlineare Integralgleichungen 105

§ 8.1. Lösbarkeit 108

§ 8.2. Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten 120

KAPITEL 2: LOKALE SURJEKTIVITÄT UND VERZWEIGUNGSPUNKTE 129

§ 9. φ-lokal beschränkte Abbildungen 130

§ 10. Die Funktion d_0 145

§ 11. Das φ-lokale Spektrum 153

§ 12. Lokale Sätze vom Fredholm Typ 164

§ 13. Verzweigungspunkte · 178

§ 13.1. Definition und Charakterisierung 179

§ 13.2. Existenz 182

§ 14. Schlußbemerkungen 191

LITERATURVERZEICHNIS 194

EINLEITUNG

A. PROBLEMSTELLUNG

Die mathematische Beschreibung naturwissenschaftlicher Vorgänge führt in den meisten Fällen auf Gleichungen der Form

(1) $Fx = y,$

wobei die Abbildung $F:X \to Y$ und ein Element $y \in Y$ gegeben sind und etwa eine Lösung $x \in X$ gesucht ist. Die Abbildung F ist in der Regel nichtlinear und stellt nicht selten ein Naturgesetz dar. So führen Probleme der Physik und der Naturwissenschaften häufig auf Differential- und Integralgleichungen. In diesen Fällen handelt es sich demnach bei den Mengen X und Y um unendlichdimensionale Funktionenräume. Oft liegt auch in Wirklichkeit eine Schar von Gleichungen vor, d.h. man hat Aufgaben der Gestalt

(2) $F(\lambda,x) = y,$

worin der Parameter λ eine gewisse Indexmenge Λ durchläuft (vgl. [4], [33], [34] und [77]).

Im folgenden seien nun X und Y reelle normierte Räume und S und T (i.a. nichtlineare) Abbildungen von X in Y. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ und $y \in Y$ betrachten wir dann als Spezialfall von (2) die Gleichung

(3) $\lambda Tx - Sx = y$

bzw. den Operator $\lambda T - S$. Neben der bereits angesprochenen Frage nach der Lösbarkeit der vorgelegten Gleichung ist in diesem Zusammenhang vor allem noch die Existenz gewisser ausgezeichneter Parameter λ von besonderem Interesse.

Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt dabei *Eigenwert des Paares (T,S)*, falls es

ein $x \in X \setminus \{0\}$ gibt mit $\lambda Tx - Sx = 0$. Jedes solche x wiederum wird ein *Eigenvektor des Paares (T,S) zum Eigenwert* λ genannt, und die Menge aller Eigenwerte bildet das *Spektrum von (T,S)* (vgl. [4], S.70, [13], S.60 und [34], S.18).

Weitere beachtenswerte Parameter λ der Gleichung (3) sind die sogenannten *asymptotischen Verzweigungspunkte des Paares (T,S)*. Es sind dies alle diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche es Folgen (λ_n) in $\mathbb{R}$ und (x_n) in $X \setminus \{0\}$ gibt mit $\lambda_n \to \lambda$, $\|x_n\| \to \infty$ und $\lambda_n Tx_n - Sx_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere ist jedes λ_n ein Eigenwert von (T,S)) (vgl. [1], S.47, [16], S.284 und [34], S.207).

Ist überdies noch $T(0)=S(0)=0$, so heißt schließlich ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ *Verzweigungspunkt des Paares (T,S)*, falls Folgen (λ_n) in $\mathbb{R}$ und (x_n) in $X \setminus \{0\}$ existieren mit $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \to 0$ und $\lambda_n Tx_n - Sx_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere ist jedes λ_n ein Eigenwert von (T,S)) (vgl. [4], S.94, [13], S.168 und [34], S.181).

Nun besitzt namentlich bei vielen Problemen der Mechanik, welche auf Operatorgleichungen der Form (3) zurückgeführt werden können, die homogene Gleichung

(4) $\qquad \lambda Tx - Sx = 0$

trivialerweise die Nullösung. Unter diesen Umständen sind also die zu einem Eigenwert λ von (T,S) existierenden Eigenvektoren einfach eine "zweite Art" Lösung von (4). Die Verzweigungspunkte bzw. asymptotischen Verzweigungspunkte bilden dagegen, grob gesprochen, die Schranken solcher Eigenwerte des Paares (T,S), die über keine "kleinen" bzw. "großen" Eigenvektoren verfügen. In konkreten Fällen besitzen alle drei, Eigenwerte, Verzweigungspunkte und asymptotische Verzweigungspunkte, häufig eine anschauliche Interpretation (vgl. [1], S.48, [4], S.1, [31], [34], S.181 und [74]).

Zusammenfassend läßt sich daher festhalten, daß wir uns vor allem mit der Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung (3) - insbesondere in Abhängigkeit des Parameters λ - sowie der Existenz von Eigenwerten, Verzweigungspunkten und asymptotischen Verzweigungspunkten des Paares (T,S) beschäftigen wollen. Darüber hinaus stellen sich in diesem Rahmen natürlich noch eine Reihe weiterer interessanter Aufgaben (vgl. [33], [34] und

[77]), auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen werden.

B. BEKANNTE LÖSUNGEN

Als Ausgangspunkt für die Untersuchungen der angesprochenen nichtlinearen Fragestellungen bieten sich in naheliegender Weise entsprechende lineare Probleme an, da hierfür bekanntlich alle gestellten Aufgaben befriedigend gelöst sind. Wir setzen also zunächst in Gleichung (3) $Y:=X$, $T:=I$ und mit einem linearen Operator $L:X\to X$ überdies $S:=L$. Bezeichnet dabei hier und im folgenden X einen reellen BANACH-Raum, so gilt der

Satz 1.

Es sei $L:X\to X$ linear.

(a) Ist noch $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und L vollstetig, so ist die Abbildung $\lambda I-L:X\to X$ genau dann bijektiv, wenn λ kein Eigenwert des Paares (I,L) ist.

(b) Jeder Eigenwert $\lambda\in\mathbb{R}$ des Paares (I,L) ist Verzweigungspunkt und asymptotischer Verzweigungspunkt des Paares (I,L).

(c) Ist noch L vollstetig, so ist jeder Verzweigungspunkt bzw. asymptotische Verzweigungspunkt $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares (I,L) Eigenwert des Paares (I,L).

Die Aussage (a) dieses Satzes stellt die berühmte FREDHOLMsche Alternative für lineare vollstetige Operatoren dar (vgl. [9], Satz[5.2.10], S.193), der Teil (b) ist trivial, und den Beweis von (c) schließlich findet man etwa bei M.A.KRASNOSELSKII (vgl. [34], S.193 bzw. S.209).

Ersetzen wir nun den linearen vollstetigen Operator $L:X\to X$ durch

eine i.a. nichtlineare vollstetige Abbildung $S:X\to X$, so möchten wir natürlich möglichst viele Ergebnisse der linearen Theorie auf unser nichtlineares Problem übertragen. Ein kleines Beispiel zeigt aber schon, wie schwierig dieses Vorhaben ist:

Definiert man $S: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad Sx:=x+1,$$

dann ist S offenbar eine (nichtlineare) vollstetige Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, und es gilt - wie man sofort nachrechnet - für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$:

> Die Abbildung $\lambda I-S: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist genau dann bijektiv, wenn λ ein Eigenwert des Paares (I,S) ist.

In diesem speziellen Fall wird also eine Aussage der oben angegebenen Alternative negiert.

Die genauen Kenntnisse im Linearen und die auftretenden Schwierigkeiten im Nichtlinearen - man denke beispielsweise noch daran, wie mühelos die allgemeine Gleichung $Ax=y$ im $\mathbb{R}^n$ für eine reelle $n\times n$-Matrix A ($n\in\mathbb{N}$) zu handhaben ist, während im Vergleich hierzu bereits Polynome wesentlich komplizierter sind - verleiten natürlich den Praktiker zur Linearisierung, d.h. zur Vernachlässigung unangenehmer nichtlinearer Anteile. In vielen Fällen läßt sich diese Vereinfachung durchaus rechtfertigen, führt aber bei anderen Problemen an den wahren Gegebenheiten vorbei. So ist es oft schon sehr viel zweckmäßiger, den nichtlinearen Operator S nicht einfach durch einen linearen L zu ersetzen, sondern zumindest in der Form $S=L+N$ anzunehmen, wobei der nichtlineare Anteil N in einem gewissen Sinne "klein" ist. Erklären wir etwa für unser Beispiel $L,N: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad Lx:=x \text{ und } Nx:=1,$$

dann folgt für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$:

> Die Abbildung $\lambda I-S=\lambda I-(L+N): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist genau dann bijektiv, wenn λ kein Eigenwert des Paares (I,L) ist.

Auch für allgemeine Gleichungen in einem beliebigen reellen BANACH-Raum X führte die angedeutete Zerlegung des nichtlinearen Operators $S:X\to X$ zu interessanten Ergebnissen. Bemerken

wir hierzu noch, daß für eine lineare vollstetige Abbildung $L:X\to X$ die *algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares (I,L) definiert ist als die Dimension des endlichdimensionalen Unterraumes $X_\lambda:=\{x\in X\mid \exists n\in\mathbb{N}:\ (\lambda I-L)^n x=0\}$ von X (vgl. [4], S.77 und [34], S.17), so lassen sich diese folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 2.

Es seien $L,N:X\to X$, L linear und vollstetig, N vollstetig und der

$$\lim_{\substack{x\in X\\ \|x\|\to\infty}} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0$$

(m.a.W.: Der Operator $S:=L+N:X\to X$ ist *asymptotisch linear* und besitzt die *asymptotische Ableitung* L (vgl. [34], S.207).). Dann folgt:

(a) Ist $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kein Eigenwert des Paares (I,L), so ist die Abbildung $\lambda I-(L+N):X\to X$ surjektiv.

(b) Jeder Eigenwert $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares (I,L) ungerader algebraischer Vielfachheit ist ein asymptotischer Verzweigungspunkt des Paares $(I,L+N)$.

(c) Jeder asymptotische Verzweigungspunkt $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares $(I,L+N)$ ist ein Eigenwert des Paares (I,L).

Satz 3.

Es seien $L,N:X\to X$, L linear und vollstetig, N vollstetig und der

$$\lim_{\substack{x\in X\\ \|x\|\to 0}} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0$$

(m.a.W.: Der Operator $S:=L+N:X\to X$ ist *FRÉCHET-differenzierbar in Null* mit der *Ableitung* L (vgl. [34], S.191).). Dann folgt:

(a) Jeder Eigenwert $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares (I,L) ungerader algebraischer Vielfachheit ist ein Verzweigungspunkt des Paares $(I,L+N)$.

(b) Jeder Verzweigungspunkt $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ des Paares $(I,L+N)$ ist ein Eigenwert des Paares (I,L).

Satz 2(a) geht auf R.I.KAČUROVSKII ([30], ohne Beweis) zurück. Die Umkehrung dieser Aussage ist aber - obwohl ebenfalls von KAČUROVSKII behauptet - nicht allgemeingültig, sondern vielmehr nur in abgeänderter Form zu beweisen (vgl. H.WEBER ([77], S.35ff.)). Die Teile (b) und (c) dagegen beruhen genauso wie der Satz 3 auf Arbeiten von M.A.KRASNOSELSKII ([34], S.208, S.209, S.196 und S.193).

In der Folgezeit gelang es dann einigen Mathematikern, die Voraussetzungen der Sätze 2(a),(b) und 3(a) abzuschwächen bzw. unter denselben Erfordernissen weiterreichende Resultate zu erzielen. Vor allem galt es, die Vollstetigkeit der betrachteten Abbildungen durch weniger einschränkende Bedingungen zu ersetzen. Darüber hinaus konnte in einigen Fällen auf die Differenzierbarkeit im Nullpunkt oder auf Vielfachheitseigenschaften der Eigenwerte verzichtet werden.

Die Tschechoslowaken S.FUČIK, J.NEČAS, J.SOUČEK und V.SOUČEK schließlich waren die ersten, welche allgemeine Paare (T,S) nichtlinearer Abbildungen S und T eines reellen BANACH-Raumes X in einen reellen BANACH-Raum Y untersuchten, wobei insbesondere der Fall $Y=X^*$, d.h. Y ist der zu X duale Raum, eine wichtige Rolle spielte (vgl. [10], [11], [13] und [54]). Sie bewiesen (vgl. [77], S.16) u.a. den

Satz 4.

Es sei $a\in\mathbb{R}^+$, $S,T:X\to Y$, S vollstetig, ungerade und a-homogen, T beschränkt, bijektiv, ungerade und a-homogen sowie $T^{-1}:Y\to X$ stetig und beschränkt. Dann folgt:

Ist $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kein Eigenwert des Paares (T,S), so ist die Abbildung $\lambda T-S:X\to Y$ surjektiv.

Ergebnisse solcherart bezeichnet man - in Analogie zur linearen Theorie - als *Sätze vom FREDHOLM Typ*. Gilt überdies noch die Umkehrung, so sprechen wir von einer *FREDHOLMschen Alternative*.

Im Anschluß daran setzte wiederum eine Entwicklung ein, im Verlaufe derer die Resultate von S.FUČIK, J.NEČAS, J.SOUČEK und V.SOUČEK ergänzt, erweitert und verallgemeinert wurden. So

stammen beispielsweise weitere Arbeiten im Zusammenhang mit

Satz 2(a) bzw. Satz 4 von P.HESS ([21], [22], [23] und [24]); G.HETZER, V.STALLBOHM ([26]); M.KUČERA ([38]); P.S. MILOJEVIĆ ([48] und [49]); P.S.MILOJEVIĆ, W.V.PETRYSHYN ([50]); W.V.PETRYSHYN ([58], [59] und [60]); J.R.L.WEBB ([76]) und H.WEBER ([77]).

Satz 2(b) von A.ALDARWISH, A.LANGENBACH ([1]); W.V.PETRYSHYN ([61]); P.H.RABINOWITZ ([65]) und C.A.STUART ([69]).

Satz 3(a) von G.HETZER ([25]); G.HETZER, V.STALLBOHM ([27]); B.LALOUX, J.MAWHIN ([40]); A.LEV ([41]); J.A.MACBAIN ([42], [43], [44] und [45]); R.D.NUSSBAUM ([55]); W.V.PETRYSHYN ([61]); P.H.RABINOWITZ ([63] und [64]); B.SCARPELLINI ([66]); K.SCHMITT, H.L.SMITH ([67]); C.A.STUART ([68]); J.W.THOMAS ([71]); R.E.L.TURNER ([72]) und B.WEGNER ([78]).

In den letzten Jahren nun, genauer seit 1975, wurde von den italienischen Mathematikern M.FURI, M.MARTELLI und A.VIGNOLI eine Spektraltheorie entwickelt, die auf einer neuen Definition des Spektrums einer nichtlinearen Abbildung S im komplexen BANACH-Raum X basiert und zu zahlreichen bemerkenswerten Ergebnissen führte (vgl. [14], [15], [16] und [18]). Dabei legten sie den Raum $Q(X)$ aller *quasibeschränkten* Abbildungen $S:X\to X$, d.h.

$$Q(X):=\{S:X\to X \text{ stetig} \mid \exists b,c\in\mathbb{R}_0^+ \forall x\in X, \|x\|\geq b: \|Sx\| \leq c\cdot\|x\|\},$$

zugrunde, der bereits auf H.GRANAS (vgl. [19]) zurückgeht (insbesondere sind also stetige und asymptotisch lineare Operatoren $S:X\to X$ Elemente aus $Q(X)$). Vermöge

$$\forall S\in Q(X): \quad |S| := \limsup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\to\infty}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|}$$

wird dann auf $Q(X)$ eine Halbnorm $|\cdot|$ erklärt. Ferner definierten sie das *Spektrum* $\Sigma(S)$ einer Abbildung $S\in Q(X)$ durch

$$\Sigma(S):=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \liminf_{\substack{x\in X \\ \|x\|\to\infty}} \frac{\|\lambda x-Sx\|}{\|x\|}=0\}$$

und bewiesen (vgl. [14]) hierfür den

Satz 5.

Es sei $S \in Q(X)$ vollstetig. Dann folgt:

Ist $\lambda \neq 0$ aus der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Sigma(S)$, so ist die Abbildung $\lambda I - S : X \to X$ surjektiv.

In Ergänzung dieser *globalen Untersuchungen* entstand überdies eine entsprechende *lokale Theorie*. Ist hierzu U eine offene Teilmenge des komplexen BANACH-Raumes X mit $0 \in U$, so führten sie die Menge $Q_0(X)$ aller *in Null quasibeschränkten* Operatoren $S : U \to X$ mit $S(0) = 0$ über

$$Q_0(X) := \{S : U \to X \text{ stetig} \mid \exists b \in \mathbb{R}^+ \exists c \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in U, \|x\| \leq b : \|Sx\| \leq c \cdot \|x\|\}$$

ein (insbesondere sind also stetige und in Null FRÉCHET-differenzierbare Abbildungen $S : U \to X$ mit $S(0) = 0$ Elemente aus $Q_0(X)$). Weiter setzten sie für $S \in Q_0(X)$

$$|S|_0 := \limsup_{\substack{x \in U \\ x \to 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|}$$

und definierten das *lokale Spektrum* $\Sigma_0(S)$ von S *in Null* vermittels

$$\Sigma_0(S) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \liminf_{\substack{x \in U \\ x \to 0}} \frac{\|\lambda x - Sx\|}{\|x\|} = 0\}.$$

Die beiden wichtigsten ihrer Resultate lauten dann wie nachstehend angegeben (vgl. [16]).

Satz 6.

Es sei $S \in Q_0(X)$ vollstetig. Dann folgt:

Ist $\lambda \neq 0$ aus der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Sigma_0(S)$, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset X$ von Null mit $(\lambda I - S)(U) \supset V$ (m.a.W.: Die Abbildung $\lambda I - S : U \to X$ ist *lokal surjektiv in Null*.).

Satz 7.

Es sei die $\dim(X) = \infty$, $S \in Q_0(X)$ vollstetig und $0 \notin \Sigma_0(S)$. Dann folgt:

Das Paar (I,S) besitzt (in $\mathbb{C}$) einen positiven und einen negativen Verzweigungspunkt.

Daran anschließend wurden diese neuen Ideen abermals sehr schnell ausgebaut. So gelang es neben M.MININNI (vgl. [51] und [52]) auch M.FURI, M.MARTELLI und A.VIGNOLI (vgl. [17]) selbst, die Vollstetigkeit der betrachteten Abbildungen abzuschwächen, während R.IANNACCI (vgl. [29]) den Begriff des quasibeschränkten Operators und des zugehörigen Spektrums auf mehrwertige Abbildungen übertrug.

C. INHALTSOBERSICHT

Den Anregungen von M.FURI, M.MARTELLI und A.VIGNOLI folgend, betrachten wir im Rahmen dieser Arbeit allgemeine Operatorgleichungen der Form

$$\lambda Tx - Sx = y.$$

Dabei sind X und Y reelle normierte Räume, $\phi \neq A \subset \Delta \subset X$, S und T (i.a. nichtlineare) Abbildungen von Δ in Y, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \Delta$ und $y \in Y$. Einer Abgrenzung von globaler gegen lokaler Theorie entsprechend unterscheiden wir nun grundsätzlich zwei Fälle:

Im ersten Kapitel wird zur Entwicklung einer *globalen Theorie* die Menge A stets als unbeschränkt vorausgesetzt. Ferner sei noch $\gamma \in \mathbb{R}^+$ gegeben und $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t \geq \gamma$. Damit nennen wir eine Abbildung $f:A \to Y$ genau dann *φ-asymptotisch beschränkt bez. A*, wenn gilt:

$$\exists b,c \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b: \quad \|f(x)\| \leq c \cdot \varphi(\|x\|).$$

Den linearen Raum aller solcher Abbildungen bezeichnen wir mit *$Q(\varphi,A,Y)$*, auf dem wir überdies vermöge

$$\forall f \in Q(\varphi,A,Y): \quad q(\varphi,A,Y)(f) := \limsup_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}$$

eine Halbnorm *$q(\varphi,A,Y)$* festlegen. Schließlich heißt für Opera-

toren $S,T\in Q(\varphi,A,Y)$ die Menge

$$\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S):=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid \liminf_{\substack{x\in A\\ \|x\|\to\infty}} \frac{\|\lambda Tx-Sx\|}{\varphi(\|x\|)}=0\}$$

das *φ-asymptotische Spektrum des Paares (T,S) bez. A*. Die Untersuchungen von $Q(\varphi,A,Y)$ (§ 2) und $\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)$ (§§ 3 und 4) liefern danach eine Reihe interessanter Ergebnisse, wobei wir insbesondere für $A=Y=X$, $T=I$ und $\varphi(t)\equiv t$ ($t\in\mathbb{R}_0^+$) die Resultate von M.FURI, K.GEORG, M.MARTELLI und A.VIGNOLI (vgl. [14] und [18]) erhalten.

Im Anschluß daran spezialisieren wir uns auf einen reellen, reflexiven und separablen BANACH-Raum X sowie auf den Dualraum als Bildraum, d.h. $Y=X^*$. Unter Verwendung von zuvor bereitgestellten grundlegenden Hilfsmitteln (§ 5) werden sodann bei geeigneten Voraussetzungen für Abbildungen $S,T:X\to X^*$ mit $S,T\in Q(\varphi,A,X^*)$ Aussagen der Gestalt

$$\lambda\notin\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)\cup\{0\} \quad \begin{matrix}\Rightarrow\\ \Leftrightarrow\end{matrix} \quad \lambda T-S:X\to X^* \text{ ist surjektiv}$$

bewiesen (§ 6), die wir wiederum als *Sätze vom FREDHOLM Typ* ("$\Rightarrow$") bzw. *FREDHOLMsche Alternativen* ("$\Leftrightarrow$") bezeichnen. Unsere Hauptergebnisse finden sich dabei in den Sätzen 6.1 und 6.3 sowie in Korollar 6.5 wieder, die - im Unterschied zu allen vergleichbaren bekannten Resultaten - u.a. keine Homogenitätseigenschaften der betrachteten Operatoren benötigen. Darüber hinaus zeigen wir im siebten Paragraphen mit Satz 7.9 die Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten des Paares (T,S), ohne hierfür die asymptotische Linearität bzw. Homogenität von S und T oder Vielfachheitseigenschaften des Parameters λ anzunehmen. Eine Anwendung der abstrakten Ergebnisse auf nichtlineare Integralgleichungen (§ 8) beschließt dann das erste Kapitel.

In Analogie hierzu setzen wir im zweiten Kapitel zur Herleitung einer *lokalen Theorie* stets $0\in A\cap\overline{A\setminus\{0\}}$ voraus. Ist weiter $\gamma\in\mathbb{R}^+$ gegeben und $\varphi:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t\in(0,\gamma]$, so heißt eine Abbildung $f:A\to Y$ mit $f(0)=0$ genau dann *φ-lokal beschränkt in Null bez. A*, wenn gilt:

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in\mathbb{R}_0^+\forall x\in A,\|x\|\le b:\quad \|f(x)\|\le c\cdot\varphi(\|x\|).$$

Auf dem linearen Raum $Q_0(\varphi,A,Y)$ aller Abbildungen $f:A\to Y$ mit

$f(0)=0$, welche φ-lokal beschränkt in Null bez. A sind, steht uns dann vermittels der Funktion $q_0(\varphi,A,Y):Q_0(\varphi,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$\forall f\in Q_0(\varphi,A,Y):\quad q_0(\varphi,A,Y)(f):=\limsup_{\substack{x\in A\\ x\to 0}}\frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}$$

wiederum eine Halbnorm zur Verfügung. Außerdem erklären wir für Operatoren $S,T\in Q_0(\varphi,A,Y)$ die Menge

$$\Sigma_\varphi^A(T,S)_0:=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid \liminf_{\substack{x\in A\\ x\to 0}}\frac{\|\lambda Tx-Sx\|}{\varphi(\|x\|)}=0\}$$

als das *φ-lokale Spektrum des Paares (T,S) in Null bez. A*. Danach geben wir gewisse Eigenschaften von $Q_0(\varphi,A,Y)$ (§ 9) und $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ (§§ 10 und 11) an, die gleichfalls die Ergebnisse von M.FURI und A.VIGNOLI beinhalten, falls A eine offene Umgebung der Null ist und überdies $Y=X$, $T=I$ und $\varphi(t)\equiv t$ $(t\in\mathbb{R}_0^+)$ gesetzt wird (vgl. [16]).

Schließlich schränken wir uns auch hier auf einen reellen, reflexiven und separablen BANACH-Raum X sowie auf den Dualraum X^* als Bildraum Y ein. Alsdann wird unter der Annahme weiterer geeigneter Bedingungen für Abbildungen $S,T:\Delta\to X^*$ mit S und T aus $Q_0(\varphi,A,X^*)$ die Gültigkeit von Aussagen der Form

$$\lambda\notin\Sigma_\varphi^A(T,S)_0\cup\{0\}\quad\overset{\rightarrow}{\underset{\leftrightarrow}{}}\quad\exists U\subset\Delta\subset X \text{ offen, } 0\in U\ \exists V\subset X^* \text{ offen, } 0\in V:\ (\lambda T-S)(U)\supset V$$

gezeigt (§ 12), die wir den globalen Resultaten entsprechend als *lokale Sätze vom FREDHOLM Typ* ("$\to$") bzw. *lokale FREDHOLMsche Alternativen* ("$\leftrightarrow$") benennen. Hauptergebnisse spiegeln sich dabei in den Sätzen 12.1 und 12.3 sowie in Korollar 12.5 wieder, die allesamt mit keinem uns bekannten Resultat vergleichbar sind. Zusätzlich weisen wir im dreizehnten Paragraphen mit Satz 13.7 die Existenz von Verzweigungspunkten des Paares (T,S) nach, ohne hierfür die Differenzierbarkeit von S und T im Nullpunkt oder Vielfachheitseigenschaften des Parameters λ annehmen zu müssen. Einige Anmerkungen zur Anwendung der abstrakten Ergebnisse auf nichtlineare Integralgleichungen und ein kurzer Ausblick (§ 14) schließen dann dieses Kapitel ab.

Die Methoden, welche wir für unsere Arbeit verwenden, sind -

ebenso wie bei M.FURI, M.MARTELLI und A.VIGNOLI - in erster Linie topologische. Vor allem ziehen wir zu unseren Untersuchungen die Theorie des Abbildungsgrades von BROUWER (vgl. [3], [4] und [13]) heran. Dennoch verlangen die hier hergeleiteten Ergebnisse im Vergleich mit den weiter oben zitierten Arbeiten der italienischen Mathematiker naturgemäß eine gänzlich andere Beweisführung, da wir ja eben nicht Abbildungen eines BANACH-Raumes X in sich studieren, sondern als Bildraum einen beliebigen BANACH-Raum Y bzw. den zu X dualen Raum X^* zugrunde legen. Darüber hinaus ergeben sich weite Bereiche des zweiten Kapitels als geradezu zwangsläufige Übersetzung entsprechender globaler Ergebnisse in lokale Aussagen. Folgerichtig stimmen auch vergleichbare Beweise zum Teil wörtlich überein, so daß wir uns dort verhältnismäßig kurz fassen und den Aufbau des ersten Kapitels so weit wie möglich übernehmen werden.

D. BEZEICHNUNGSWEISEN UND GRUNDBEGRIFFE

Diese Arbeit ist - wie bereits erwähnt - in zwei Kapitel unterteilt. Jedes Kapitel wiederum gliedert sich in mehrere Paragraphen. Letztere sind fortlaufend numeriert, also unabhängig davon, zu welchem Kapitel sie gehören. Innerhalb eines Paragraphen zählen wir Definitionen, Lemmata, Sätze usw. nicht getrennt, sondern bezeichnen sie in der Reihenfolge ihres Auftretens, wobei die Nummer des betreffenden Paragraphen vorangestellt wird. So kommen etwa Zitate und Benennungen wie "nach Korollar 6.5" und "Bemerkung 6.6" vor. Hingegen wird zum Beispiel ein Satz einer fremden Arbeit zitiert, indem wir die Nummer dieses Satzes in eckige Klammern fassen und eine entsprechende Literaturangabe hinzufügen. Demnach bedeutet etwa "Satz[2.2] ([13], S.72)" den Satz 2.2 auf Seite 72 der im Literaturverzeichnis unter Punkt 13 aufgeführten Schrift.

Schließlich werden Formeln innerhalb eines Paragraphen getrennt gezählt und ebenfalls fortlaufend in der üblichen Weise benannt, wobei erneut die Nummer des jeweiligen Paragraphen vorangestellt wird.

Darüber hinaus sind die in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Grundbegriffe ausnahmslos wohlbekannt. Dennoch werden wir im folgenden - um Mißverständnisse zu vermeiden - die wichtigsten hiervon noch einmal kurz erläutern.

Mit $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^+$) bezeichnen wir die Menge der positiven (negativen, nichtnegativen) reellen Zahlen. Ferner schreiben wir für einen normierten Raum $(X,\|\cdot\|_X)$ auch kürzer $(X,\|\cdot\|)$ oder nur X, verzichten also insbesondere in vielen Fällen auf eine Indizierung der Norm.

Weiter seien jetzt X und Y reelle normierte Räume, $A_0 \subset A \subset X$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Die *schwache* bzw. *starke (Norm-) Konvergenz* einer Folge $(x_n) \subset X$ gegen ein Element $x \in X$ symbolisieren wir dann mittels $x_n \to x$ bzw. $x_n \to x$. Oberdies nennen wir die Menge A *symmetrisch*, wenn A=-A ist.

Damit heißt eine Abbildung $f:A \to Y$ genau dann

beschränkt, wenn für jede beschränkte Teilmenge B von A das Bild f(B) von B unter f beschränkt ist.

kompakt, wenn für jede beschränkte Teilmenge B von A das Bild f(B) von B unter f relativkompakt ist (d.h. die Bildfolge $(f(x_n))$ jeder in X beschränkten Folge $(x_n) \subset A$ enthält eine (norm-) konvergente Teilfolge).

a-asymptotisch Null, wenn A=X und der

$$\lim_{\substack{x \in X \\ \|x\| \to \infty}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} = 0$$

ist.

halbstetig, wenn für jede Folge $(x_n) \subset A$ und alle $x \in A$ mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.

schwachstetig, wenn für jede Folge $(x_n) \subset A$ und alle $x \in A$ mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.

stetig, wenn für jede Folge $(x_n) \subset A$ und alle $x \in A$ mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.

starkstetig, wenn für jede Folge $(x_n)\subset A$ und alle $x\in A$ mit $x_n\to x$ gilt: $f(x_n)\to f(x)$.

vollstetig, wenn sie stetig und kompakt ist.

ungerade, wenn A symmetrisch ist und für alle $x\in A$ gilt: $f(x)=-f(-x)$.

a-homogen, wenn für jedes $t\in\mathbb{R}_0^+$ und alle $x\in A$ gilt: $tx\in A$ und $f(tx)=t^a f(x)$.

Außerdem wird der Kern *Kern(f)* einer Abbildung $f:A\to Y$ definiert durch $\mathrm{Kern}(f):=\{x\in A\mid f(x)=0\}$ und für die Einschränkung $f|_{A_0}:A_0\to Y$ von $f:A\to Y$ auf A_0 in der Regel kürzer $f:A_0\to Y$ geschrieben. Zudem setzen wir beispielsweise

$$\underset{\|x\|=1}{A\text{-}\sup}\ \|f(x)\| := \sup_{\substack{x\in A\\ \|x\|=1}} \|f(x)\|$$

und verfahren bei allen ähnlichen Ausdrücken ganz entsprechend.

Ist nun noch X^* der zu X duale Raum, $x\in X$ und $y\in X^*$, so bedeutet das Symbol *(y,x)* den Wert des linearen Funktionals y an der Stelle x.

Hiermit erfüllt eine Abbildung $f:A\to X^*$ genau dann die

Bedingung (S), wenn für jede Folge $(x_n)\subset A$ und alle $x\in A$ mit $x_n\to x$ und $(f(x_n)-f(x),x_n-x)\to 0$ gilt: $x_n\to x$.

Bedingung (S^+), wenn für jede Folge $(x_n)\subset A$ und alle $x\in A$ mit $x_n\to x$ und $\limsup_{n\to\infty}(f(x_n)-f(x),x_n-x)\leq 0$ gilt: $x_n\to x$.

Schließlich sei Z ein endlichdimensionaler normierter Raum, Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von Z, $f:\overline{\Omega}\to Z$ eine stetige Abbildung und z ein Element aus $Z\setminus f(\partial\Omega)$ ($\overline{\Omega}$ ist die abgeschlossene Hülle von Ω, $\partial\Omega$ ist der Rand von Ω). Sodann verstehen wir unter dem Zeichen *deg(f,Ω,z)* den *BROUWERschen Abbildungsgrad der Abbildung f auf Ω bez. z.*

Anmerkungen: Eine vollstetige Abbildung ist trivialerweise stetig und darüber hinaus sogar beschränkt. Ebenso ist eine starkstetige Abbildung insbesondere stetig, und aus der Stetigkeit wiederum folgt die Halbstetigkeit. Letztere ergibt

sich überdies aus der schwachen Stetigkeit. Ferner erfüllt eine Abbildung mit der Bedingung (S^+) offenbar auch die Bedingung (S). Schließlich werden wir im weiteren oftmals verwenden, daß die Summe zweier Abbildungen, von denen die eine vollstetig ist und die andere der Bedingung (S) genügt, gleichfalls die Bedingung (S) erfüllt (vgl. Lemma[1.2], [77], S.19).

Kapitel 1: Surjektivität und asymptotische Verzweigungspunkte

In diesem ersten Kapitel untersuchen wir in Abhängigkeit eines reellen Parameters λ bestimmte globale Eigenschaften von Operatoren der Form $\lambda T-S$, welche einen reellen normierten Raum X in einen reellen normierten Raum Y bzw. in den zu X dualen Raum X^* abbilden. Hierunter verstehen wir in erster Linie die Herleitung von Surjektivitätssätzen vom FREDHOLM Typ sowie den Nachweis der Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten des Paares (T,S).

§ 1. φ-BESCHRÄNKTE ABBILDUNGEN

Im ganzen Abschnitt seien X und Y reelle normierte Räume, $\phi \neq A \subset X$, $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter die Funktion $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ verstanden werden.

Von grundlegender Bedeutung für die im folgenden zu entwikkelnde nichtlineare Spektraltheorie sind, wie eingangs erwähnt, die φ-asymptotisch beschränkten bzw. die φ-lokal beschränkten Abbildungen, welche in den §§ 2 bzw. 9 eingeführt werden. Wir definieren und untersuchen jedoch zunächst die Klasse der φ-beschränkten Abbildungen, weil diese Operatoren als Verallgemeinerungen der linearen Operatoren L bei der Zerlegung einer nichtlinearen Abbildung $S: X \to X$ in $S = L + N$ $(L, N: X \to X)$ mit

$$\underset{\|x\| \to \infty}{X\text{-}\lim} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underset{x \to 0}{X\text{-}\lim} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0$$

aufgefaßt werden können. Dies verdeutlichen insbesondere die Beispiele 2.12 bzw. 9.13 sowie die Lemmata 2.15 bzw. 9.16. Darüber hinaus können mit Hilfe der φ-beschränkten Abbildungen einige Beweise für φ-asymptotisch beschränkte bzw. φ-lokal beschränkte Abbildungen leichter geführt werden.

Definition 1.1.

(a) Eine Abbildung $f: A \to Y$ heißt genau dann *φ-beschränkt bez. A*, wenn gilt:

(1.1) $\quad \exists c \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A: \quad \|f(x)\| \leq c \cdot \varphi(\|x\|)$.

(b) $B(\varphi, A, Y) := \{f: A \to Y \mid f \text{ ist } \varphi\text{-beschränkt bez. } A\}$.

(c) Für $0 \in A$ definieren wir $B_0(\varphi, A, Y) := \{f \in B(\varphi, A, Y) \mid f(0) = 0\}$.

Wir halten also insbesondere fest, daß an eine Abbildung f aus $B(\varphi, A, Y)$ bzw. $B_0(\varphi, A, Y)$ keinerlei Stetigkeitsanforderungen gestellt werden. Ferner wollen wir der Einfachheit halber vereinbaren, statt $B(\varphi, A, Y)$ bzw. $B_0(\varphi, A, Y)$ auch kurz B bzw. B_0 zu schreiben, wenn keine Verwechslungen befürchtet werden müssen.

Damit erhalten wir sofort das

Lemma 1.2.

(a) B ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) Für $0 \in A$ ist B_0 ein Unterraum von B.

Beweis:

Klar.

q.e.d.

Ebenso, wie man auf dem Raum L(X,Y) der linearen und stetigen Abbildungen $f: X \to Y$ eine Norm einführt, gelingt dies nun auch für den Raum $B(\varphi, A, Y)$.

Definition 1.3.

Die Funktion $\|\cdot\|_{B(\varphi,A,Y)}: B(\varphi,A,Y) \to \mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall f \in B(\varphi,A,Y): \quad \|f\|_{B(\varphi,A,Y)} := \inf\{c \in \mathbb{R}_0^+ \mid \forall x \in A: \|f(x)\| \leq c \cdot \varphi(\|x\|)\}.$$

Ferner wird für $0 \in A$ die Einschränkung von $\|\cdot\|_B$ auf B_0 wieder mit $\|\cdot\|_B$ bezeichnet.

Wie bereits angedeutet ist jetzt $(B, \|\cdot\|_B)$ ein normierter Raum, d.h. es gilt das

Lemma 1.4.

(a) $\forall f \in B \forall x \in A: \quad \|f(x)\| \leq \|f\|_B \cdot \varphi(\|x\|)$.

(b) $(B, \|\cdot\|_B)$ ist ein normierter Raum.

(c) Für $0 \in A$ ist $(B_0, \|\cdot\|_B)$ ein abgeschlossener Unterraum von $(B, \|\cdot\|_B)$.

Beweis:

Ad.(a): Angenommen, es gibt ein $f_0 \in B$ und ein $x_0 \in A$ mit

$$\|f_0(x_0)\| > \|f_0\|_B \cdot \varphi(\|x_0\|).$$

Nach der Definition von $\|f_0\|_B$ ist dann für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die

$$\|f_0\|_B \cdot \varphi(\|x_0\|) < \|f_0(x_0)\| \leq (\|f_0\|_B + \varepsilon) \cdot \varphi(\|x_0\|),$$

d.h.

$$0 < \|f_o(x_o)\| - \|f_o\|_B \cdot \varphi(\|x_o\|) \leq \varepsilon \cdot \varphi(\|x_o\|).$$

Für genügend kleines ε ergibt dies aber einen Widerspruch.

Ad.(b): (i) Trivialerweise ist für jedes $f \in B$ die $\|f\|_B \geq 0$. (ii) Es sei $f \in B$ mit $\|f\|_B = 0$. Nach Teil (a) wird somit für jedes $x \in A$ die $\|f(x)\| \leq \|f\|_B \cdot \varphi(\|x\|) = 0$, d.h. $f = 0$. (iii) Gilt für $f \in B$ noch $f(x) = 0$ für jedes $x \in A$, dann ist offenbar die $\|f\|_B = 0$. (iv) Es sei $f \in B$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist $\alpha = 0$, so folgt mit (iii) sofort $|\alpha| \|f\|_B = 0 = \|\alpha f\|_B$. Im Fall $\alpha \neq 0$ ergibt sich dagegen für jedes $c \in \mathbb{R}_o^+$:

$$[\forall x \in A: \|f(x)\| \leq c \cdot \varphi(\|x\|)] \Leftrightarrow$$
$$[\forall x \in A: \|(\alpha f)(x)\| \leq (|\alpha| c) \cdot \varphi(\|x\|)],$$

d.h. $\|\alpha f\|_B = |\alpha| \|f\|_B$. (v) Seien $f, g \in B$. Mit Teil (a) erhalten wir sodann für jedes $x \in A$:

$$\|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq (\|f\|_B + \|g\|_B) \cdot \varphi(\|x\|),$$

d.h. $\|f+g\|_B \leq \|f\|_B + \|g\|_B$.
Insgesamt besitzt demnach die Funktion $\|\cdot\|_B : B \to \mathbb{R}_o^+$ die Eigenschaften einer Norm.

Ad.(c): Es sei $0 \in A$, $(f_n) \subset B_o$, $f \in B$ und $f_n \to f$, d.h. $\|f_n - f\|_B \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n(0) = 0$, und zusammen mit Teil (a) bekommen wir

$$\|f(0)\| = \|f(0) - f_n(0)\| \leq \|f - f_n\|_B \cdot \varphi(\|0\|) \to 0$$

für $n \to \infty$. Daher ist auch $f(0) = 0$ und somit $f \in B_o$.

q.e.d.

Unter weiteren Voraussetzungen läßt sich sogar die Vollständigkeit des normierten Raumes $(B, \|\cdot\|_B)$ beweisen, dies zeigen wir in

Lemma 1.5.

(a) Mit Y ist auch $(B, \|\cdot\|_B)$ ein BANACH-Raum.

(b) Für $0 \in A$ ist mit Y auch $(B_o, \|\cdot\|_B)$ ein BANACH-Raum.

Beweis:

Ad.(a): Es sei (f_n) eine CAUCHY-Folge in $(B,\|\cdot\|_B)$. Berücksichtigen wir jetzt Lemma 1.4(a), so ergibt sich für jedes feste $x\in A$, daß auch die Folge $(f_n(x))$ im BANACH-Raum Y eine CAUCHY-Folge bildet und somit einen Grenzwert besitzt. Folglich ist die Abbildung $f:A\to Y$ erklärt durch

$$\forall x\in A:\ f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

wohldefiniert.

Wir zeigen: $f\in B$. Da eine CAUCHY-Folge insbesondere beschränkt ist, gibt es eine Konstante $M\in\mathbb{R}^+$, so daß die $\|f_n\|_B\leq M$ ist für jedes $n\in\mathbb{N}$. Daher wird für alle $x\in A$ und $n\in\mathbb{N}$ die

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)\|\\ &\leq \|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n\|_B\cdot\varphi(\|x\|)\\ &\leq \|f(x)-f_n(x)\|+M\cdot\varphi(\|x\|)\end{aligned}$$

und wegen $f_n(x)\to f(x)$ die $\|f(x)\|\leq M\cdot\varphi(\|x\|)$, d.h. $f\in B$.

Wir zeigen: $f_n\to f$ in $(B,\|\cdot\|_B)$. Weil (f_n) eine CAUCHY-Folge ist, erhält man:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geq n_0\forall x\in A:$$

$$\begin{aligned}\|f_n(x)-f(x)\| &\leq \|f_n(x)-f_m(x)\|+\|f_m(x)-f(x)\|\\ &\leq \|f_n-f_m\|_B\cdot\varphi(\|x\|)+\|f_m(x)-f(x)\|\\ &\leq \varepsilon\cdot\varphi(\|x\|)+\|f_m(x)-f(x)\|.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Definition von f liefert demnach der Grenzübergang $m\to\infty$:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0\forall x\in A:\ \|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon\cdot\varphi(\|x\|),$$

d.h. $\|f_n-f\|_B\leq\varepsilon$ und also $f_n\to f$ in $(B,\|\cdot\|_B)$.

Ad.(b): Direkte Folge von Teil (a) und Lemma 1.4(c).

q.e.d.

Analog zur Darstellung der Norm auf L(X,Y) gilt hier das

Lemma 1.6.

$$\forall f\in B:\quad \|f\|_B=\begin{cases}0, \text{ falls für jedes } x\in A\ \varphi(\|x\|)=0 \text{ ist,}\\ \underset{\varphi(\|x\|)\neq 0}{\text{A-sup}}\ \dfrac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}, \text{ sonst.}\end{cases}$$

Beweis:

Es sei $f\in B$. Ist $\varphi(\|x\|)=0$ für jedes $x\in A$, dann ist $f=0$ und somit auch die $\|f\|_B=0$. Im folgenden existiere also ein $x\in A$ mit $\varphi(\|x\|)>0$. Einerseits ergibt sich dann wegen

(1.2) $\quad \forall x\in A:\ \|f(x)\| \leq \|f\|_B\cdot\varphi(\|x\|)$

insbesondere

$$\forall x\in A,\varphi(\|x\|)\neq 0:\ \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \|f\|_B,$$

d.h.

$$c_0 := \underset{\varphi(\|x\|)\neq 0}{A\text{-sup}} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \|f\|_B < \infty .$$

Andererseits folgt aus (1.2) für jedes $x\in A$ mit $\varphi(\|x\|)=0$ noch $f(x)=0$. Unter Berücksichtigung von

$$\forall x\in A,\varphi(\|x\|)\neq 0:\ \|f(x)\| \leq c_0\cdot\varphi(\|x\|)$$

erhalten wir daher

$$\forall x\in A:\ \|f(x)\| \leq c_0\cdot\varphi(\|x\|),$$

d.h. $\|f\|_B\leq c_0$.

q.e.d.

Um die in den Räumen B bzw. B_0 liegenden Möglichkeiten etwas näher zu beleuchten, aber auch um ihre Grenzen aufzuzeigen, geben wir abschließend noch das

Beispiel 1.7.

(a) Es sei $A\neq\{0\}$, $tA\subset A$ für jedes $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $f:A\to Y$ a-homogen. Dann folgt:

(i) $f\in B_0(a,A,Y) \Leftrightarrow f:A\to Y$ ist beschränkt.

(ii) $f\in B_0(a,A,Y) \Rightarrow \|f\|_{B(a,A,Y)} = \underset{\|x\|=1}{A\text{-sup}} \|f(x)\|$.

(b) Es sei $U\subset X$ offen mit $0\in U$ und $f\in L(X,Y)$. Dann folgt:

$f\in B_0(1,U,Y)$ und $\|f\|_{L(X,Y)} = \|f\|_{B(1,U,Y)}$.

(c) Es sei $f:A\to Y$ beschränkt und $f\neq 0$. Dann folgt:

Es gibt eine Funktion $\varphi:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ mit $f\in B(\varphi,A,Y)$ und die $\|f\|_{B(\varphi,A,Y)}=1$.

(d) Es sei A unbeschränkt, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, $f:A\to Y$ und der $A\text{-}\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}=0$. Dann folgt:

Es ist nicht notwendigerweise $f\in B(\varphi,A,Y)$.

(e) Es sei $0\in A\cap\overline{A\setminus\{0\}}$, $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$, $f:A\to Y$ mit $f(0)=0$ und der $A\text{-}\lim_{x\to 0}\frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}=0$. Dann folgt:

Es ist nicht notwendigerweise $f\in B_0(\varphi,A,Y)$.

(f) Es sei $x_0\in A$, $\varphi(\|x_0\|)=0$ und $f:A\to Y$ mit $f(x_0)\neq 0$. Dann folgt:

$f\notin B(\varphi,A,Y)$.

Beweis:

Ad.(a), (i): "$\Rightarrow$" Für $f\in B_0(a,A,Y)$ und jedes $x\in A$ wird die

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_{B(a,A,Y)}\cdot\|x\|^a,$$

d.h. $f:A\to Y$ ist beschränkt.

"$\Leftarrow$" Es sei $f:A\to Y$ beschränkt und a-homogen. Dann ist $f(0)=0$, und für jedes $x\in A\setminus\{0\}$ erhalten wir

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} = \|f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq A\text{-}\sup_{\|u\|=1}\|f(u)\| < \infty.$$

Zusammen bedeutet dies aber

$$\|f(x)\| \leq A\text{-}\sup_{\|u\|=1}\|f(u)\|\cdot\|x\|^a$$

für alle $x\in A$, d.h. $f\in B_0(a,A,Y)$.

Ad.(a), (ii): Es sei $f\in B_0(a,A,Y)$ a-homogen. Unter Berücksichtigung von Lemma 1.6 ergibt sich:

$$\|f\|_{B(a,A,Y)} = A\text{-}\sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} = A\text{-}\sup_{x\neq 0}\|f(\frac{x}{\|x\|})\|$$

$$= A\text{-}\sup_{\|u\|=1}\|f(u)\|.$$

Ad.(b): Es sei $f\in L(X,Y)$. Also ist einerseits für jedes $x\in X$ die $\|f(x)\|\leq\|f\|_{L(X,Y)}\cdot\|x\|$ und somit insbesondere $f\in B_0(1,U,Y)$ mit $\|f\|_{B(1,U,Y)}\leq\|f\|_{L(X,Y)}$. Andererseits gibt es wegen der geforderten Gestalt von U eine abgeschlossene Kugel vom Radius $r\in\mathbb{R}^+$

und Mittelpunkt Null, die ganz in U enthalten ist. Deshalb folgt wiederum mit Lemma 1.6:

$$\|f\|_{B(1,U,Y)} = \underset{x\neq 0}{\text{U-sup}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \geq \underset{\|x\|=r}{\text{X-sup}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$
$$= \underset{\|x\|=r}{\text{X-sup}} \|f(\frac{x}{\|x\|})\| = \underset{\|u\|=1}{\text{X-sup}} \|f(u)\|$$
$$= \|f\|_{L(X,Y)}.$$

Ad.(c): Es sei $f:A\to Y$ beschränkt und $f\neq 0$. Wir erklären $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\forall t\in\mathbb{R}_0^+: \quad \varphi(t) := \begin{cases} \underset{\|x\|=t}{\text{A-sup}} \|f(x)\| & \text{für } A\cap\{x\in X \mid \|x\|=t\}\neq\phi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion φ ist wohldefiniert, da f beschränkt ist. Ferner wird sofort für jedes $x\in A$ die

$$\|f(x)\| \leq \underset{\|y\|=\|x\|}{\text{A-sup}} \|f(y)\| = \varphi(\|x\|).$$

Demnach ist aber $f\in B(\varphi,A,Y)$ mit $\|f\|_{B(\varphi,A,Y)}\leq 1$. Weiter gibt es unter der Voraussetzung $f\neq 0$ ein $x_0\in A$, so daß $f(x_0)\neq 0$ ist. Nach Definition von φ wird daher für $t_0 := \|x_0\|$ $\varphi(t_0)>0$ und es existiert eine Folge (x_n) aus A mit $\|x_n\|=t_0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\|f(x_n)\|\to\varphi(t_0)$. Damit erhalten wir für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$\|f(x_n)\| \leq \|f\|_{B(\varphi,A,Y)}\cdot\varphi(\|x_n\|) = \|f\|_{B(\varphi,A,Y)}\cdot\varphi(t_0),$$

d.h.

$$\|f\|_{B(\varphi,A,Y)} \geq \frac{\|f(x_n)\|}{\varphi(t_0)} \to 1$$

für $n\to\infty$ und somit $\|f\|_{B(\varphi,A,Y)}\geq 1$.

Ad.(d): Wir setzen $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=$ $:=\sqrt{|x|}$ für $x\in\mathbb{R}$. Dann ist der $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$ und der

$$\underset{|x|\to\infty}{\text{A-lim}} \frac{|f(x)|}{\varphi(|x|)} = \underset{|x|\to\infty}{\mathbb{R}\text{-lim}} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = 0.$$

Aber offenbar gibt es keine Konstante $c\in\mathbb{R}_0^+$, so daß für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt:

$$|f(x)| = \sqrt{|x|} \leq c\cdot|x| = c\cdot\varphi(|x|).$$

Ad.(e): Hier liefert das Beispiel $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=x^2$ für $x\in\mathbb{R}$ analog zum Teil (d) das Gewünschte.

Ad.(f): Trivial.

q.e.d.

Die Teile (a) und (b) von Beispiel 1.7 stellen also Zusammenhänge zwischen den Räumen $B_0(1,A,Y)$ und $L(X,Y)$ her. Der Teil (c) zeigt, daß jede (wie auch immer nichtlineare) beschränkte Abbildung $f:A\to Y$ Element eines gewissen Raumes $B(\varphi,A,Y)$ ist. Im Gegensatz zu dieser erfreulichen Eigenschaft gibt es "gutartige" Abbildungen $f:A\to Y$, die nicht in allen Räumen $B(\varphi,A,Y)$ bzw. $B_0(\varphi,A,Y)$ enthalten sind, wie man (d) und (f) bzw. (e) und (f) entnimmt. Diese Nachteile werden wir in den §§ 2 bzw. 9 beheben, indem wir die φ-asymptotisch beschränkten bzw. die φ-lokal beschränkten Abbildungen einführen und damit die Räume $B(\varphi,A,Y)$ bzw. $B_0(\varphi,A,Y)$ erweitern.

§ 2. φ-ASYMPTOTISCH BESCHRÄNKTE ABBILDUNGEN

Im ganzen Abschnitt seien X und Y reelle normierte Räume, $A\subset X$ unbeschränkt, $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t\geq\gamma$ und $a\in\mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter wieder die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ definiert durch $\varphi(t):=t^a$ $(t\in\mathbb{R}_0^+)$ verstanden werden.

Zusätzlich zum ersten Paragraphen fordern wir also grundsätzlich die Unbeschränktheit der Teilmenge A und $\varphi(t)>0$ für hinreichend große t aus $\mathbb{R}_0^+$. Dies versetzt uns in die Lage, den Begriff der φ-beschränkten Abbildung in sinnvoller Weise zu verallgemeinern.

Definition 2.1.

(a) Eine Abbildung $f:A\to Y$ heißt genau dann *φ-asymptotisch beschränkt bez. A*, wenn gilt:

$$\exists b,c\in\mathbb{R}_0^+\forall x\in A,\|x\|\geq b:\quad \|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|).$$

(b) $Q(\varphi,A,Y):=\{f:A\to Y\mid f \text{ ist } \varphi\text{-asymptotisch beschränkt bez. } A\}$.

Für bez. A φ-asymptotisch beschränkte Abbildungen $f:A\to Y$ verlangen wir also nicht mehr wie in (1.1), daß für eine gewisse Konstante $c\in\mathbb{R}_0^+$ die Ungleichung

$$\|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|)$$

für alle $x\in A$ erfüllt ist, sondern nur für solche mit hinreichend großer Norm. Insbesondere ist damit eine quasibeschränkte Abbildung $f:X\to X$ (vgl. Einleitung, S.7) aus $Q(1,X,X)$. Schließlich wollen wir vereinbaren, im Einzelfall statt $Q(\varphi,A,Y)$ kurz Q zu schreiben.

Lemma 2.2.

Q ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beweis:

Klar.

q.e.d.

Leider scheitert nun der Versuch, ebenso wie auf B auch auf Q eine Norm einzuführen.

Definition 2.3.

Die Funktion $q(\varphi,A,Y):Q(\varphi,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall f\in Q(\varphi,A,Y):\quad q(\varphi,A,Y)(f):=\inf\{c\in\mathbb{R}_0^+\mid \exists b\in\mathbb{R}_0^+\forall x\in A,\ \|x\|\geq b:\quad \|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|)\}.$$

Auch hier sei festgestellt, daß wir unter geeigneten Umständen statt $q(\varphi,A,Y)$ kurz q schreiben werden.

Es zeigt sich jetzt, daß die oben eingeführte Funktion q zwar nicht mehr die Eigenschaften einer Norm auf Q besitzt, jedoch stets die einer Halbnorm. Genauer gilt das

Lemma 2.4.

(a) $f \in Q \rightarrow \exists b \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b: \ \|f(x)\| \leq q(f) \cdot \varphi(\|x\|)$.

(b) q ist eine Halbnorm auf Q.

(c) q ist keine Norm auf Q.

Beweis:

Ad.(a): Wir belegen die Behauptung durch Angabe eines Beispiels und setzen hierzu $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t^2$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=x$ für $x \in \mathbb{R}$. Ist nun $c \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, so wird für jedes $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq \frac{1}{c}$, der

$$|f(x)| = |x| \leq c \cdot |x|^2 = c \cdot \varphi(|x|),$$

d.h. $f \in Q(2,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q(2,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$. Dagegen ist aber $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ad.(b): Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung. Es seien also $f,g \in Q$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Definition der Funktion q erhalten wir unmittelbar:

$$\exists b_f \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b_f: \ \|f(x)\| \leq (q(f)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|)$$

und

$$\exists b_g \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b_g: \ \|g(x)\| \leq (q(g)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Erklärt man demnach $b:=\max\{b_f,b_g\}$, so wird für alle $x \in A$ mit $\|x\| \geq b$ die

$$\|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq (q(f)+q(g)+2\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Dies bedeutet aber $q(f+g) \leq q(f)+q(g)$, denn $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ war ja beliebig.

Ad.(c): Es seien $x_0 \in A \setminus \{0\}$ und $y_0 \in Y \setminus \{0\}$ beliebig, aber fest gewählt. Dann definieren wir $f:A \rightarrow Y$ durch $f(x):=0$ für alle x aus $A \setminus \{x_0\}$ und $f(x_0):=y_0$. Damit ergibt sich einerseits

$$\forall x \in A, \|x\| \geq 2\|x_0\|: \ \|f(x)\| = 0 \leq 0 \cdot \varphi(\|x\|),$$

d.h. es ist $f \in Q$ mit $q(f)=0$. Andererseits ist aber nach Definition $f \neq 0$.

q.e.d.

Eine zweite Darstellung für die Halbnorm q(f) einer Abbildung

$f \in Q$ geben wir mit

Lemma 2.5.

$$\forall f \in Q: \quad q(f) = \overset{A\text{-lim sup}}{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}.$$

Beweis:

Es sei $f \in Q$. Einerseits folgt dann nach Definition von $q(f)$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b: \ \|f(x)\| \leq (q(f)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|)$$

und somit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq \max\{b, \gamma\}: \ \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq q(f)+\varepsilon,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+: \ c_0 := \overset{A\text{-lim sup}}{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq q(f)+\varepsilon < \infty$$

und also $c_0 \leq q(f)$. Um nun andererseits noch $q(f) \leq c_0$ zu beweisen, zeigen wir:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x\| \geq b: \ \|f(x)\| \leq (c_0+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Nehmen wir hierfür an,

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}_0^+ \exists x \in A, \|x\| \geq b: \ \|f(x)\| > (c_0+\varepsilon_0) \cdot \varphi(\|x\|),$$

so ergibt sich die Existenz einer Folge (x_n) in A mit $\|x_n\| \to \infty$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die

$$\|f(x_n)\| > (c_0+\varepsilon_0) \cdot \varphi(\|x_n\|).$$

O.B.d.A. kann dabei noch die $\|x_n\| \geq \gamma$ $(n \in \mathbb{N})$ vorausgesetzt werden. Damit erhalten wir

$$c_0 = \overset{A\text{-lim sup}}{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq \overset{\text{lim sup}}{n \to \infty} \frac{\|f(x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)}$$

$$\geq c_0+\varepsilon_0 > c_0$$

und demnach einen Widerspruch.

q.e.d.

Das folgende Lemma erklärt Verbindungen zwischen den Räumen Q und B.

Lemma 2.6.

(a) B ist ein Unterraum von Q (algebraisch).

(b) $\forall f \in B: \quad q(f) \leq \|f\|_B$.

(c) $f \in Q \;\Rightarrow\; f \in B$.

(d) $f \in B \;\Rightarrow\; q(f) \geq \|f\|_B$.

Beweis:

Die Teile (a) und (b) sind klar!

Ad.(c): Wir beweisen die Behauptung durch Angabe eines Beispiels und setzen hierzu $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t^2$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=x$ für $x \in \mathbb{R}$. Zum einen ist dann (vgl. Beweis von Lemma 2.4(a)) $f \in Q(2,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q(2,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$, während es zum anderen offenbar keine Konstante $c \in \mathbb{R}_0^+$ gibt mit

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; |f(x)| = |x| \leq c \cdot |x|^2 = c \cdot \varphi(|x|),$$

d.h. $f \notin B(2,\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ad.(d): Wählen wir hier $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x) := \begin{cases} x & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1, \end{cases}$$

so liefert dieses Beispiel die Behauptung, denn es wird jetzt

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; |f(x)| \leq |x| = 1 \cdot \varphi(|x|)$$

und

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 2: \; |f(x)| = 0 \leq 0 \cdot \varphi(|x|).$$

Damit ist jedoch einerseits $f \in B(1,\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$, während andererseits wegen $f \neq 0$ die $\|f\|_{B(1,\mathbb{R},\mathbb{R})} > 0$ ist.

q.e.d.

Für ein beliebiges Element f aus einem beliebigen Raum $B(\varphi,A,Y)$ stimmen nach Lemma 2.6 die Halbnorm $q(\varphi,A,Y)(f)$ von f und die Norm $\|f\|_{B(\varphi,A,Y)}$ von f nicht notwendigerweise überein. Es gibt jedoch unter Umständen in $B(a,A,Y)$ gewisse Abbildungen, auf welche dies zutrifft. Hierzu das

Beispiel 2.7.

Es sei $f:A\to Y$ und

$$\forall x\in A\forall R\in\mathbb{R}^+\exists t\in[R,\infty): \quad tx\in A \text{ und } f(tx)=t^a f(x).$$

Dann folgt:

(a) $f\in Q(a,A,Y) \Rightarrow q(a,A,Y)(f)=\overset{A\text{-}\sup}{x\neq 0}\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}$.

(b) $f\in B(a,A,Y) \Rightarrow f\in Q(a,A,Y)$ und $q(a,A,Y)(f)=\|f\|_{B(a,A,Y)}$.

Beweis:

Ad.(a): Es sei $f:A\to Y$ von der angegebenen Art und aus $Q(a,A,Y)$. Ferner sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Insbesondere gibt es also ein $b\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $x\in A$, $\|x\|\geq b$, die

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}\leq q(a,A,Y)(f)+\varepsilon$$

wird. Bezeichnet weiter für jedes $x\in A\setminus\{0\}$ t_x eine nach Voraussetzung existierende positive reelle Zahl mit

$$t_x x\in A,\ \|t_x x\|\geq b \text{ und } f(t_x x)=t_x{}^a f(x),$$

so erhalten wir:

$$\forall x\in A\setminus\{0\}: \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}=\frac{t_x{}^a\|f(x)\|}{t_x{}^a\|x\|^a}=\frac{\|f(t_x x)\|}{\|t_x x\|^a}$$
$$\leq q(a,A,Y)(f)+\varepsilon,$$

d.h.

$$c_0:=\overset{A\text{-}\sup}{x\neq 0}\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}\leq q(a,A,Y)(f)+\varepsilon<\infty$$

und schließlich $c_0\leq q(a,A,Y)(f)$, denn $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ war ja beliebig. Außerdem ist umgekehrt unmittelbar klar, daß $q(a,A,Y)(f)\leq c_0$ ist.

Ad.(b): Nach Lemma 2.6(a) ist $B(a,A,Y)$ ein Unterraum von $Q(a,A,Y)$. Die Behauptung ergibt sich dann aus Teil (a) zusammen mit Lemma 1.6.

q.e.d.

Auf jedem Vektorraum Q steht uns nach Lemma 2.4(b) mit der Funktion $q:Q\to\mathbb{R}_0^+$ eine Halbnorm zur Verfügung. Wie wir in den

weiteren Paragraphen noch sehen werden, ist es im folgenden nicht notwendig, zwischen zwei Abbildungen $f,g \in Q$ mit $q(f-g)=0$ zu unterscheiden. Dementsprechend untersuchen wir zunächst die Menge aller Abbildungen $f \in Q$ mit $q(f)=0$ bzw. Paare $f,g \in Q$ mit $q(f-g)=0$, um dann vom Raum (Q,q) in natürlicher Weise zu einem normierten Raum überzugehen.

Definition 2.8.

(a) $N(\varphi,A,Y) := \{f \in Q(\varphi,A,Y) \mid q(\varphi,A,Y)(f)=0\}$.

(b) Es seien $f,g \in Q(\varphi,A,Y)$. f heißt genau dann *φ-asymptotisch äquivalent zu g bez. A*, i.Z. $f \sim g$, wenn gilt:

$$f-g \in N(\varphi,A,Y).$$

Ferner vereinbaren wir, von Fall zu Fall statt $N(\varphi,A,Y)$ kurz N zu schreiben. Damit erhalten wir sofort das

Lemma 2.9.

(a) N ist ein Unterraum von Q.

(b) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf Q.

Beweis:

Ad.(a): Gilt, da q eine Halbnorm auf Q ist.

Ad.(b): Direkte Folge von Teil (a) (vgl. [32], S.212).

q.e.d.

Die Elemente von N können überdies auch wie nachstehend angegeben charakterisiert werden.

Lemma 2.10.

Es sei $f:A \to Y$. Dann folgt:

$$f \in N(\varphi,A,Y) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-}\lim} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Beweis:

Für jede Abbildung $f:A \to Y$ gilt:

$$\underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\lim}\ \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\geq R:\ \|f(x)\|\leq \varepsilon\cdot\varphi(\|x\|) \quad \Leftrightarrow$$

$f\in Q(\varphi,A,Y)$ mit $q(\varphi,A,Y)(f)=0$.

q.e.d.

Wie Lemma 2.10 zeigt, überträgt sich die für globale Aussagen unbefriedigende Eigenschaft der Räume B aus Beispiel 1.7(d) nicht auf die Räume Q.

Beispiel 2.11.

(a) Es sei der $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, $f:A\to Y$, und das Bild $f(A)$ von A unter f sei beschränkt. Dann folgt:

$f\in N(\varphi,A,Y)$.

(b) Es sei f eine Abbildung von $D(f)\subset X$ in Y, und der Kern Kern(f) von f sei unbeschränkt. Dann folgt:

$f\in N(\varphi,Kern(f),Y)$.

(c) Es sei A symmetrisch, und für jedes $h:A\to Y$ sei die Abbildung $h^-:A\to Y$ definiert durch

$$\forall x\in A:\ h^-(x):=-h(-x).$$

Dann folgt für alle $f\in Q(\varphi,A,Y)$:

(i) $f^-\in Q(\varphi,A,Y)$.

(ii) $f\sim f^- \quad\Leftrightarrow\quad \exists g\in Q(\varphi,A,Y)$, g ungerade: $f\sim g$.

(d) Es seien $f,g\in Q(a,A,Y)$ und

$$\forall x\in A\forall R\in\mathbb{R}^+\exists t\in[R,\infty):$$
$$tx\in A,\ f(tx)=t^a f(x) \text{ und } g(tx)=t^a g(x).$$

Dann folgt:

$f\sim g \quad\Leftrightarrow\quad f=g$.

Beweis:

Ad.(a): Es sei $f:A\to Y$ eine Abbildung mit beschränktem Bild $f(A)$ und der $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, insbesondere also der

$$\underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\lim}\ \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}=0.$$

Die Behauptung ergibt sich demnach mit Lemma 2.10.

Ad.(b): Klar.

Ad.(c): Es sei A symmetrisch und $f\in Q(\varphi,A,Y)$. Offenbar ist dann auch $f(-\cdot)\in Q(\varphi,A,Y)$ mit $q(\varphi,A,Y)(f(-\cdot))=q(\varphi,A,Y)(f)$ und daher $f^-\in Q(\varphi,A,Y)$. Ist nun einerseits $f\sim f^-$, so definieren wir $g:A\to Y$ durch $g:=\frac{1}{2}(f+f^-)$. Folglich ist g ungerade und außerdem aus $Q(\varphi,A,Y)$. Ferner wird wegen $f-g=\frac{1}{2}(f-f^-)$ noch $q(\varphi,A,Y)(f-g)=$ $=\frac{1}{2}q(\varphi,A,Y)(f-f^-)=0$, d.h. $f\sim g$. Andererseits erhalten wir für eine ungerade Abbildung $g\in Q(\varphi,A,Y)$ mit $f\sim g$:

$$f-f^- = f+f(-\cdot) = (f-g)+(f(-\cdot)-g(-\cdot))$$

und somit

$$\begin{aligned} q(\varphi,A,Y)(f-f^-) &\leq q(\varphi,A,Y)(f-g)+q(\varphi,A,Y)(f(-\cdot)-g(-\cdot)) \\ &= q(\varphi,A,Y)(f-g)+q(\varphi,A,Y)(f-g) = 0, \end{aligned}$$

d.h. $f\sim f^-$.

Ad.(d): Für $f=g$ ist trivialerweise $f\sim g$. Umgekehrt ergibt sich unter den gemachten Voraussetzungen aus $f\sim g$ nach Beispiel 2.7(a) (zusammen mit $f(0)=g(0)=0$, falls $0\in A$!) sofort $f=g$.

q.e.d.

Beispiel 2.11(b) zeigt vor allem, daß für Abbildungen $f,g:X\to Y$ mit $f,g\in Q(\varphi,A,Y)$ und $f\sim g$ die Differenz $f-g:X\to Y$ nicht notwendigerweise "schwach nichtlinear" ist:

Betrachten wir etwa $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x):=x \text{ und } g(x):=x-e^{x^2}\sin x,$$

so können wir $A:=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{Z}: x=k\pi\}$ setzen und erhalten sofort:

$$f,g\in Q(1,A,\mathbb{R}) \text{ mit } q(1,A,\mathbb{R})(f-g)=0.$$

Für die Differenz $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ergibt sich aber

$$(f-g)(x) = e^{x^2}\sin x \quad (x\in\mathbb{R})$$

und somit eine "stark nichtlineare" Funktion.

Insbesondere dieser Sachverhalt stellt die Bedeutung der Menge A bei Einführung der Räume $Q(\varphi,A,Y)$ heraus.

Das nächste Beispiel gibt an, wie sich nichtlineare Operatoren

$f:X\to Y$, welche eine asymptotische Ableitung besitzen (vgl. Einleitung, S.5), in die Theorie der φ-asymptotisch beschränkten Abbildungen einordnen lassen.

Beispiel 2.12.

Die Abbildung $f:X\to Y$ sei asymptotisch linear mit der asymptotischen Ableitung f_∞, d.h. es ist $f_\infty\in L(X,Y)$ und der

$$(2.1)\qquad \operatorname{X-lim}_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)-f_\infty(x)\|}{\|x\|}=0.$$

Dann folgt:

$f_\infty\in B_0(1,X,Y)$, $f\in Q(1,X,Y)$, $f\sim f_\infty$ und $\|f_\infty\|_{L(X,Y)}=\|f_\infty\|_{B(1,X,Y)}=$
$=q(1,X,Y)(f_\infty)=q(1,X,Y)(f)$.

Beweis:

Nach den Beispielen 1.7(b) und 2.7(b) ist $f_\infty\in B_0(1,X,Y)\cap$
$\cap B(1,X,Y)\cap Q(1,X,Y)$ mit $\|f_\infty\|_{L(X,Y)}=\|f_\infty\|_{B(1,X,Y)}=q(1,X,Y)(f_\infty)$.
Ferner gibt es wegen (2.1) zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ein $R\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $x\in X$ mit $\|x\|\geq R$ gilt:

$$(2.2)\qquad \|f(x)\|-\|f_\infty(x)\|\leq\|f(x)-f_\infty(x)\|\leq\varepsilon\cdot\|x\|$$

und weiter

$$(2.3)\qquad \|f(x)\|\leq(\varepsilon+\|f_\infty\|_{L(X,Y)})\cdot\|x\|.$$

Nach (2.3) ist also $f\in Q(1,X,Y)$, während aus (2.2) überdies $q(1,X,Y)(f-f_\infty)=0$ und somit auch $q(1,X,Y)(f_\infty)=q(1,X,Y)(f)$ folgt.

q.e.d.

Umgekehrt ist aber natürlich nicht jedes $f\in Q(1,X,Y)$ notwendigerweise asymptotisch linear, wie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x):=|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ zeigt. Bei unseren späteren Betrachtungen können wir daher auf Abbildungen zurückgreifen, die keine asymptotische Ableitung besitzen.

Bekanntlich nennt man nun für $f\in Q(\varphi,A,Y)$

$$\hat{f}:=\{g\in Q(\varphi,A,Y)\mid f\sim g\}$$

die von f erzeugte *Äquivalenzklasse*. Die Elemente einer Äqui-

valenzklasse heißen auch *Repräsentanten* dieser Klasse. Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder identisch oder disjunkt. Jedes Element von $Q(\varphi,A,Y)$ schließlich ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. (Ist speziell für ein gewisses $R\in\mathbb{R}^+$ und alle $t\in[R,\infty)$ $tA\subset A$, so entnimmt man noch Beispiel 2.11(d), daß es für alle $f\in Q(a,A,Y)$ in der von f erzeugten Äquivalenzklasse $\hat{f}$ höchstens eine Abbildung $g:A\to Y$ mit $g(tx)=t^a g(x)$ für alle $(t,x)\in[R,\infty)\times A$ gibt.)

Weiter wird auf der Menge der Äquivalenzklassen durch

$$\hat{f}+\hat{g}:=\widehat{f+g} \quad \text{und} \quad \alpha\hat{f}:=\widehat{\alpha f} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt (unabhängig von der Wahl der Repräsentanten). Hinsichtlich dieser Operationen ist dann die Menge aller Äquivalenzklassen selbst wieder ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Nullelement $\hat{0}$ und heißt der *Quotientenraum* von $Q(\varphi,A,Y)$ nach dem Unterraum $N(\varphi,A,Y)$. Er wird mit $Q(\varphi,A,Y)/N(\varphi,A,Y)$ bezeichnet.

Ferner heißt die Abbildung

$$\omega:=\omega(\varphi,A,Y):Q(\varphi,A,Y)\to Q(\varphi,A,Y)/N(\varphi,A,Y)$$

definiert durch

$$\forall f\in Q(\varphi,A,Y):\quad \omega(f):=\hat{f}$$

die *natürliche Abbildung* von $Q(\varphi,A,Y)$ auf $Q(\varphi,A,Y)/N(\varphi,A,Y)$. Sie ist linear, surjektiv und der $\mathrm{Kern}(\omega)=N(\varphi,A,Y)$ (vgl. [32], S.212ff.).

In naheliegender Weise werden wir jetzt auf dem Raum $Q(\varphi,A,Y)/N(\varphi,A,Y)$ eine Norm erklären.

Definition 2.13.

(a) $QN(\varphi,A,Y):=Q(\varphi,A,Y)/N(\varphi,A,Y)$.

(b) Die Funktion $\|\cdot\|_{QN(\varphi,A,Y)}:QN(\varphi,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall\hat{f}\in QN(\varphi,A,Y):\quad \|\hat{f}\|_{QN(\varphi,A,Y)}:=q(\varphi,A,Y)(f).$$

Die Funktion $\|\cdot\|_{QN(\varphi,A,Y)}$ ist wohldefiniert, da für alle $f_1,f_2\in Q(\varphi,A,Y)$ mit $f_1\sim f_2$ $q(\varphi,A,Y)(f_1)=q(\varphi,A,Y)(f_2)$ ist. Dar-

über hinaus wollen wir noch verabreden, im Einzelfall statt $QN(\varphi,A,Y)$ auch kürzer QN zu schreiben.

Lemma 2.14.

$(QN,\|\cdot\|_{QN})$ ist ein normierter Raum.

Beweis:

Man prüft sofort nach, daß mit q auf Q auch $\|\cdot\|_{QN}$ auf QN eine Halbnorm ist. Sei demnach noch $\hat{f}\in QN$ mit $\|\hat{f}\|_{QN}=0$ und also $q(f)=0$. Dann ist $f\in N$ und somit $f\sim 0$, d.h. $\hat{f}=\hat{0}$.

q.e.d.

Wie sich weiter zeigen läßt, zieht die Vollständigkeit des Raumes Y auch die des normierten Raumes $(QN,\|\cdot\|_{QN})$ nach sich. Der Vorbereitung hierzu dient das

Lemma 2.15.

$\forall f\in Q\exists(f_n)\subset B\forall n\in\mathbb{N}:\quad f_n\sim f$ und $\|f_n\|_B\to q(f)$.

Beweis:

Es sei $f\in Q$. Dann

$$\exists b,c\in\mathbb{R}_0^+\forall x\in A,\|x\|\geq b:\ \|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|).$$

Weiter wählen wir ein $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\geq b$ aus und definieren für jedes $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, eine Abbildung $f_n:A\to Y$ durch

$$\forall x\in A:\ f_n(x):=\begin{cases} f(x), & \text{falls } \|x\|\geq n,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wir zeigen: $\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0:\ f_n\in B\subset Q$. Dies folgt sofort aus

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in A,\|x\|\geq n\geq n_0\geq b:\ \|f_n(x)\|=\|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|)$$

und

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0\forall x\in A,\|x\|<n:\ \|f_n(x)\|=0\leq c\cdot\varphi(\|x\|).$$

Wir zeigen: $\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0:\ f_n\sim f$. Die Behauptung ist unmittelbar klar, da für jedes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq n_0$ und alle $x\in A$ mit $\|x\|\geq n$ $f_n(x)=f(x)$ ist.

Wir zeigen: $\|f_n\|_B \to q(f)$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Hierfür

$$\exists \tilde{b} \in \mathbb{R}_0^+, \tilde{b} \geq n_0 \forall x \in A, \|x\| \geq \tilde{b}: \|f(x)\| \leq (q(f)+\varepsilon)\cdot\varphi(\|x\|).$$

Wie oben schließt man hieraus auf

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \tilde{b} \geq n_0 \forall x \in A: \|f_n(x)\| \leq (q(f)+\varepsilon)\cdot\varphi(\|x\|),$$

d.h.

(2.4) $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \tilde{b} \geq n_0: \|f_n\|_B \leq q(f)+\varepsilon.$$

Andererseits erhalten wir nach Lemma 1.4(a)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \forall x \in A, \|x\| \geq n: \|f(x)\| = \|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_B \cdot \varphi(\|x\|)$$

und demnach

(2.5) $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: q(f) \leq \|f_n\|_B.$$

Die Zusammenfassung von (2.4) und (2.5) ergibt also

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \tilde{b} \geq n_0: |\|f_n\|_B - q(f)| = \|f_n\|_B - q(f) \leq \varepsilon.$$

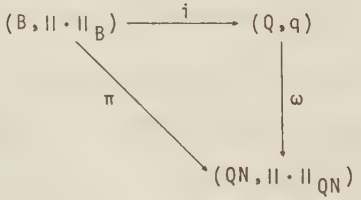
Dies bedeutet aber $\|f_n\|_B \to q(f)$, da ja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war.

q.e.d.

Abschließend sind wir nun in der Lage, die wesentlichsten Zusammenhänge zwischen den Räumen B, Q und QN zu formulieren. Dies geschieht mit

Lemma 2.16.

Für



mit

i definiert durch $i(f) := f$ für jedes $f \in B$,
ω definiert durch $\omega(f) := \hat{f}$ für jedes $f \in Q$ und
π definiert durch $\pi := \omega \circ i$

folgt:

(a) $(B,\|\cdot\|_B)$ ist ein normierter Raum. Er ist sogar ein BANACH-Raum, falls Y ein BANACH-Raum ist.

(b) (Q,q) ist ein halbnormierter Raum.

(c) $(QN,\|\cdot\|_{QN})$ ist ein normierter Raum. Er ist sogar ein BANACH-Raum, falls Y ein BANACH-Raum ist.

(d) Die Abbildung i ist linear, injektiv, und für jedes $f\in B$ ist $q(i(f))\leq\|f\|_B$.

(e) Die Abbildung ω ist linear, surjektiv, und für jedes $f\in Q$ ist die $\|\omega(f)\|_{QN}=q(f)$.

(f) Die Abbildung π ist linear, surjektiv, und für jedes $f\in B$ ist die $\|\pi(f)\|_{QN}\leq\|f\|_B$.

Beweis:

Die Aussagen (a) und (b) sind bereits mit den Lemmata 1.4(b), 1.5(a) und 2.4(b) bewiesen.

Ad.(d): Nach Lemma 2.6(a) ist die Abbildung i wohldefiniert. Ferner sind Linearität und Injektivität von i klar. Der Rest der Behauptung ergibt sich mit Lemma 2.6(b).

Ad.(e): Linearität und Surjektivität der Abbildung ω sind wiederum klar. Weiter wird für alle $f\in Q$ noch die

$$\|\omega(f)\|_{QN} = \|\hat{f}\|_{QN} = q(f).$$

Ad.(f): Mit den Teilen (d) und (e) ist die Abbildung π linear und für jedes $f\in B$ die

$$\|\pi(f)\|_{QN} = \|\omega(i(f))\|_{QN} = q(i(f)) \leq \|f\|_B.$$

Es bleibt also die Surjektivität von π zu zeigen. Sei dazu $\hat{f}\in QN$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $f\in Q$, und nach Lemma 2.15 gibt es ein $g\in B$ mit $g\sim f$. Daher folgt $\hat{g}=\hat{f}$ und somit $\pi(g)=\hat{f}$.

Ad.(c): Nach Lemma 2.14 ist $(QN,\|\cdot\|_{QN})$ ein normierter Raum. Im folgenden setzen wir demnach Y als vollständig voraus und halten fest, daß ein normierter Raum genau dann vollständig ist, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe konvergiert (vgl. [6], S.84). Sei daher $(\hat{f}_n)\subset QN$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_n\|_{QN} < \infty .$$

Nach Lemma 2.15 existiert dann eine Folge (g_n) in B, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\pi(g_n) = \hat{f}_n \quad \text{und} \quad \|g_n\|_B \leq \|\hat{f}_n\|_{QN} + 2^{-n}.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{k} \|g_n\|_B \leq \sum_{n=1}^{k} \|\hat{f}_n\|_{QN} + \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_n\|_{QN} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty ,$$

d.h. die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

konvergiert absolut im Raum $(B, \|\cdot\|_B)$, der nach Teil (a) vollständig ist. Demzufolge gibt es ein $g \in B$ mit

$$\sum_{n=1}^{k} g_n \to g \text{ für } k \to \infty$$

in $(B, \|\cdot\|_B)$. Da die Abbildung $\pi : (B, \|\cdot\|_B) \to (QN, \|\cdot\|_{QN})$ nach Teil (f) linear und stetig ist, erhalten wir weiter:

$$\sum_{n=1}^{k} \hat{f}_n = \sum_{n=1}^{k} \pi(g_n) = \pi\Big(\sum_{n=1}^{k} g_n\Big) \to \pi(g) \text{ für } k \to \infty$$

in $(QN, \|\cdot\|_{QN})$. Also ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n$$

konvergent und somit $(QN, \|\cdot\|_{QN})$ ein BANACH-Raum.

q.e.d.

§ 3. DIE FUNKTION d

Im ganzen Abschnitt seien X, Y und Z reelle normierte Räume, $A \subset X$ unbeschränkt, $B \subset Y$ unbeschränkt, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t \geq \gamma$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so ist damit wie immer die Funktion $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ gemeint.

Die Funktion $d: Q \to \mathbb{R}_0^+$, welche wir jetzt einführen und untersuchen werden, ist von großer Wichtigkeit für die weiteren Betrachtungen. Mit Hilfe von d können wir nämlich im nächsten Paragraphen das "asymptotische Spektrum" eines Paares (T,S) nichtlinearer Abbildungen $S,T \in Q$ erklären und eine Reihe von Eigenschaften dieses Spektrums aus entsprechenden Eigenschaften von d herleiten.

Definition 3.1.

Die Funktion $d(\varphi,A,Y): Q(\varphi,A,Y) \to \mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall f \in Q(\varphi,A,Y): \quad d(\varphi,A,Y)(f) := \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-}\liminf} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}.$$

Nach Lemma 2.5 ist für jedes $f \in Q(\varphi,A,Y)$

$$d(\varphi,A,Y)(f) = \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-}\liminf} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-}\limsup} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} = q(\varphi,A,Y)(f) < \infty$$

und damit $d(\varphi,A,Y)(f)$ wohldefiniert. Oberdies wollen wir wieder vereinbaren, statt $d(\varphi,A,Y)$ auch kurz d zu schreiben, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Erste Merkmale der Funktion d lassen sich nun wie nachfolgend angegeben zusammenfassen.

Lemma 3.2.

Für alle $f,g \in Q$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $0 \leq d(f) \leq q(f)$.

(b) $d(\alpha f) = |\alpha| \cdot d(f)$.

(c) $d(f+g) \leq d(f) + q(g)$.

(d) $d(f) - q(g) \leq d(f+g)$.

(e) $|d(f) - d(g)| \leq q(f-g)$.

(f) $f \sim g \Rightarrow d(f) = d(g)$.

Beweis:

Die Teile (a) und (b) sind klar.

Ad.(c): Es seien $f,g \in Q$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es eine Konstante $b \in \mathbb{R}_0^+$, so daß für alle $x \in A$ mit $\|x\| \geq b$ die

$$\begin{aligned} \|(f+g)(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \|f(x)\| + (q(g)+\varepsilon)\cdot\varphi(\|x\|) \end{aligned}$$

ist. Demnach folgt für jedes $x \in A$ mit $\|x\| \geq \max\{b,\gamma\}$:

$$\frac{\|(f+g)(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q(g) + \varepsilon$$

und weiter

$$\begin{aligned} d(f+g) &= \underset{\|x\| \to \infty}{\text{A-lim inf}} \frac{\|(f+g)(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \\ &\leq \underset{\|x\| \to \infty}{\text{A-lim inf}} \left(\frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q(g) + \varepsilon\right) \\ &= \underset{\|x\| \to \infty}{\text{A-lim inf}} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q(g) + \varepsilon = d(f) + q(g) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, ergibt sich hieraus die Behauptung.

Ad.(d): Für $f,g \in Q$ erhalten wir mit Teil (c):

$$d(f) = d(f+g-g) \leq d(f+g)+q(-g) = d(f+g)+q(g).$$

Ad.(e): Für $f,g \in Q$ folgt mit Teil (c):

$$d(f) = d(f-g+g) \leq d(g)+q(f-g),$$

d.h.

$$d(f)-d(g) \leq q(f-g)$$

und ebenso

$$d(g)-d(f) \leq q(f-g).$$

Ad.(f): Direkte Folge von Teil (e).

q.e.d.

Lemma 3.3.

Es sei $f \in Q(1,A,Y)$, $f(A) \subset B$ und $g \in Q(a,B,Z)$ beschränkt. Dann folgt:

$g \circ f \in Q(a,A,Z)$ und $d(a,A,Z)(g \circ f) \leq q(a,B,Z)(g) \cdot [d(1,A,Y)(f)]^a$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es Konstanten b_f, b_g, c_f und c_g aus $\mathbb{R}^+$ mit

$$\forall x \in A, \|x\| \geq b_f: \ \|f(x)\| \leq c_f \cdot \|x\|$$

und

$$\forall y \in B, \|y\| \geq b_g: \ \|g(y)\| \leq c_g \cdot \|y\|^a.$$

Ferner ist

$$M := \underset{\|y\| < b_g}{B\text{-sup}} \|g(y)\| < \infty,$$

denn $g: B \to Z$ ist beschränkt. Definieren wir nun $c := M / b_f^a$, so erhalten wir für alle $x \in A$, $\|x\| \geq b_f$:

$$\|(g \circ f)(x)\| \leq \begin{cases} M = c \cdot b_f^a \leq c \cdot \|x\|^a, & \text{falls } \|f(x)\| < b_g, \\ c_g \cdot \|f(x)\|^a \leq c_g \cdot c_f^a \cdot \|x\|^a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $\tilde{c} := \max\{c, c_g \cdot c_f^a\}$ ist daher für jedes $x \in A$, $\|x\| \geq b_f$, die

$$\|(g \circ f)(x)\| \leq \tilde{c} \cdot \|x\|^a,$$

d.h. $g \circ f \in Q(a,A,Z)$.

Sei jetzt $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $y \in B$, $\|y\| \geq b$, die

$$\|g(y)\| \leq (q(a,B,Z)(g) + \varepsilon) \cdot \|y\|^a$$

ist. Weiter wird

$$K := \underset{\|y\| < b}{B\text{-sup}} \|g(y)\| < \infty$$

und also die

$$\|(g \circ f)(x)\| \leq K + (q(a,B,Z)(g) + \varepsilon) \cdot \|f(x)\|^a$$

für jedes $x \in A$. Damit folgt:

$$d(a,A,Z)(g\circ f) = \underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\lim\ \inf}\ \frac{\|(g\circ f)(x)\|}{\|x\|^a}$$

$$\leq \underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\lim\ \inf}\ \Big(\frac{K}{\|x\|^a}+(q(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\cdot \frac{\|f(x)\|^a}{\|x\|^a}\Big)$$

$$= (q(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\cdot\Big(\underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\lim\ \inf}\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\Big)^a$$

$$= (q(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\cdot[d(1,A,Y)(f)]^a.$$

Da $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig war, ergibt sich hieraus die Behauptung.

q.e.d.

Das nächste Beispiel ist schon ein erster Hinweis darauf, wie das "asymptotische Spektrum" eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren $S,T\in Q$ in sinnvoller Weise zu erklären ist.

Beispiel 3.4.

(a) Es sei $f:A\to Y$ und

$$\forall x\in A\,\forall R\in\mathbb{R}^+\,\exists t\in[R,\infty):\ tx\in A \text{ und } f(tx)=t^a f(x).$$

Dann folgt:

$$f\in Q(a,A,Y) \Rightarrow d(a,A,Y)(f) = \underset{x\neq 0}{A\text{-}\inf}\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}.$$

(b) Es sei $f:A\to B$ bijektiv mit der Inversen $f^{-1}:B\to A$. Ferner seien f und f^{-1} beschränkt sowie $f\in Q(1,A,Y)$ und $f^{-1}\in Q(1,B,X)$. Dann folgt:

$$q(1,B,X)(f^{-1})>0 \text{ und } d(1,A,Y)(f) = [q(1,B,X)(f^{-1})]^{-1}.$$

Beweis:

Ad.(a): Es sei $f:A\to Y$ von der angegebenen Art, $f\in Q(a,A,Y)$ und

$$c_0 := \underset{x\neq 0}{A\text{-}\inf}\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}.$$

Dann gibt es eine Folge $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|^a} = c_0.$$

Darüber hinaus existiert nach Voraussetzung zu jedem x_n $(n\in\mathbb{N})$ ein $t_n\in\mathbb{R}^+$, so daß

$$t_n x_n\in A,\ \|t_n x_n\|\geq n \text{ und } f(t_n x_n)=t_n{}^a f(x_n)$$

gilt. Also wird

$$d(a,A,Y)(f) = \underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\liminf} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|f(t_n x_n)\|}{\|t_n x_n\|^a}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{t_n{}^a \|f(x_n)\|}{t_n{}^a \|x_n\|^a} = c_o.$$

Andererseits ist trivialerweise $d(a,A,Y)(f)\geq c_o$.

Ad.(b): Wir setzen zur Abkürzung $g:=f^{-1}$. Dann gibt es zunächst Konstanten b_f, b_g, c_f und c_g aus $\mathbb{R}^+$ mit

$$\forall x\in A, \|x\|\geq b_f:\ \|f(x)\| \leq c_f\cdot\|x\|$$

und

$$\forall y\in B, \|y\|\geq b_g:\ \|g(y)\| \leq c_g\cdot\|y\|.$$

Weiter ist wegen der Beschränktheit von f bzw. g

$$M_f := \underset{\|x\|<b_f}{A\text{-}\sup} \|f(x)\| < \infty$$

bzw.

$$M_g := \underset{\|y\|<b_g}{B\text{-}\sup} \|g(y)\| < \infty.$$

Damit schließen wir auf

(3.1) $$\forall x\in A:\ \|x\| = \|g(f(x))\| \leq M_g + c_g\cdot\|f(x)\|$$
$$\leq M_g + c_g(M_f + c_f\cdot\|x\|)$$

und

(3.2) $$\forall y\in B:\ \|y\| = \|f(g(y))\| \leq M_f + c_f\cdot\|g(y)\|$$
$$\leq M_f + c_f(M_g + c_g\cdot\|y\|).$$

Nach (3.2) folgt sofort

$$q(1,B,X)(g) = \underset{\|y\|\to\infty}{B\text{-}\limsup} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \geq \frac{1}{c_f} > 0,$$

während wir aus (3.1)

$$\|x\| \to \infty \ (x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad \|f(x)\| \to \infty \ (x \in A)$$

und somit

$$0 < q(1,B,X)(g) = \underset{\|y\| \to \infty}{B\text{-lim sup}} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-lim sup}} \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}$$

$$= \left(\underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-lim inf}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \right)^{-1}$$

$$= [d(1,A,Y)(f)]^{-1}$$

erhalten.

q.e.d.

Das Beispiel 3.4(b) läßt nun folgendes erkennen:

Ist X ein reeller BANACH-Raum, $L:X \to X$ linear und vollstetig, $N:X \to X$ vollstetig mit

$$\underset{\|x\| \to \infty}{X\text{-lim}} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0$$

und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kein Eigenwert des Paares (I,L) (im üblichen Sinne), dann wird nach der FREDHOLMschen Alternative für lineare vollstetige Operatoren und dem "Satz vom inversen Operator" $\lambda I - L$ ein linearer Homöomorphismus von X auf X. Weiter ist nach Beispiel 2.12 noch $\lambda I - L \in B_0(1,X,X)$, $\lambda I - (L+N) \in Q(1,X,X)$ und $\lambda I - (L+N) \sim \lambda I - L$. Also erhalten wir zusammen mit Lemma 3.2(f), Beispiel 3.4(b), Beispiel 2.7(b) und Beispiel 1.7(b):

$$d(1,X,X)(\lambda I - (L+N)) = d(1,X,X)(\lambda I - L)$$

$$= [q(1,X,X)((\lambda I - L)^{-1})]^{-1}$$

$$= [\|(\lambda I - L)^{-1}\|_{B(1,X,X)}]^{-1}$$

$$= [\|(\lambda I - L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1},$$

d.h. insbesondere

$$d(1,X,X)(\lambda I - (L+N)) > 0. \tag{3.3}$$

Schließlich gibt es offenbar ein $R \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $x \in X$ mit $\|x\| \geq R$ gilt:

$$\|\lambda x - (L+N)(x)\| \geq \|\lambda x - Lx\| - \|Nx\| \tag{3.4}$$

$$\geq [\|(\lambda I - L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1} \cdot \|x\| - \|Nx\|$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot [\|(\lambda I - L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1} \cdot \|x\|.$$

Die Eigenschaft (3.4) verwendet man aber gerade dazu, um mit Hilfe der Theorie des Abbildungsgrades von LERAY und SCHAUDER die Surjektivität der Abbildung $\lambda I-(L+N):X\to X$ zu zeigen (vgl. Lemma[4.2], [77], S.33). Wüßten wir jetzt außerdem, daß die Bedingung (3.3) die Eigenschaft (3.4) impliziert, so wäre es naheliegend, die Menge aller $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $d(1,X,X)(\lambda I-(L+N))=0$ als das "asymptotische Spektrum" des Paares $(I,L+N)$ zu definieren. In der Tat besteht jedoch dieser Zusammenhang. Die entsprechende Aussage formulieren wir zweckmäßigerweise gleich für gewisse Homotopien und bekommen allgemeiner das

Lemma 3.5.

Es sei $h:[0,1]\times A\to Y$ und $h(t,\cdot)\in Q(\varphi,A,Y)$ für jedes $t\in[0,1]$. Ist ferner für alle $t_0\in[0,1]$ der

$$(3.5)\qquad \lim_{\substack{t\to t_0\\ \|x\|\to\infty\\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|h(t,x)-h(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)}=0,$$

dann folgt:

(a) $[\forall t\in[0,1]: d(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot))>0] \Leftrightarrow$
$[\exists B,C\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\geq B\forall t\in[0,1]: C\cdot\varphi(\|x\|)\leq\|h(t,x)\|]$.

(b) $[\forall t\in[0,1]: d(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot))>0] \Rightarrow$
$[\exists R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\geq R\forall t\in[0,1]: h(t,x)\neq 0]$.

Beweis:

Ad.(a): "$\Rightarrow$" Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h.

$$\forall B,C\in\mathbb{R}^+\exists x\in A, \|x\|\geq B\exists t\in[0,1]: C\cdot\varphi(\|x\|)>\|h(t,x)\|.$$

Dann erhalten wir Folgen $(C_n)\subset\mathbb{R}^+$, $(x_n)\subset A$ und $(t_n)\subset[0,1]$ mit $C_n\to 0$, $\|x_n\|\to\infty$, und für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$C_n\cdot\varphi(\|x_n\|)>\|h(t_n,x_n)\|\geq 0.$$

O.B.d.A. können wir dabei noch die Konvergenz der Folge (t_n) gegen ein Element $t_0\in[0,1]$ voraussetzen. Demnach ergibt sich zusammen mit (3.5):

$$0\leq d(\varphi,A,Y)(h(t_0,\cdot))=\text{A-}\liminf_{\|x\|\to\infty}\frac{\|h(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|h(t_0,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\|h(t_0,x_n)-h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} + \frac{\|h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} \right)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\|h(t_0,x_n)-h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} + C_n \right) = 0.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $d(\varphi,A,Y)(h(t_0,\cdot))>0$.

"$\Leftarrow$" Es sei $t\in[0,1]$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Voraussetzung ist für alle $x\in A$ mit $\|x\|\geq\max\{B,\gamma\}$ die

$$\frac{\|h(t,x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq C$$

und daher

$$d(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot)) = \underset{\|x\|\to\infty}{A\text{-}\liminf} \frac{\|h(t,x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq C > 0.$$

Ad.(b): Direkte Folge von Teil (a), da $\varphi(\|x\|)>0$ ist für alle $x\in A$, $\|x\|\geq\gamma$.

q.e.d.

In erster Linie der Teil (a) des letzten Lemmas gibt nun endgültig Aufschluß darüber, wie wir für ein Paar (T,S) nichtlinearer Abbildungen $S,T\in Q(\varphi,A,Y)$ in sinnvoller Weise ein "asymptotisches Spektrum" erklären können. Es werden dies gemäß unserem weiter oben, im speziellen Fall gemachten Vorschlag, alle diejenigen $\lambda\in\mathbb{R}$ sein, für die $d(\varphi,A,Y)(\lambda T-S)=0$ ist.

Als nützlich im Hinblick auf die später zu formulierenden Sätze vom FREDHOLM Typ erweist sich im Zusammenhang mit Lemma 3.5 noch die

Definition 3.6.

Es sei $f:D(f)\to Y$ mit $A\subset D(f)\subset X$. Dann heißt

(a) die Abbildung f genau dann *gleichmäßig φ-asymptotisch regulär bez. A*, wenn gilt:

$$\exists B,C\in\mathbb{R}^+ \forall x\in A, \|x\|\geq B: \quad C\cdot\varphi(\|x\|) \leq \|f(x)\|.$$

(b) die Abbildung f genau dann *gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A*, wenn f gleichmäßig φ-asymptotisch

regulär bez. A und $f(D(f))=Y$ ist.

(b) die Gleichung

$$f(x) = y \quad (x\in D(f),\ y\in Y)$$

genau dann *gleichmäßig φ-asymptotisch regulär lösbar bez. A*, wenn die Abbildung f gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A ist.

Dabei ergibt sich die Bezeichnungsweise aus Begriffsbildungen in [13], S.61 und [77], S.20.

§ 4. DAS φ-ASYMPTOTISCHE SPEKTRUM

Im ganzen Abschnitt seien W, X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 und Z reelle normierte Räume, $A,B\subset X$ unbeschränkt, $A_1\subset X_1$ unbeschränkt, $A_2\subset X_2$ unbeschränkt, $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t\geq\gamma$ und $a\in\mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter wieder die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ definiert durch $\varphi(t):=t^a$ $(t\in\mathbb{R}_0^+)$ verstanden werden.

Wie das Lemma 3.5 und die in diesem Zusammenhang gemachten Bemerkungen ergeben haben, wird bei den später herzuleitenden Surjektivitätssätzen für Operatoren der Form $\lambda T-S$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$ und $S,T\in Q$ benötigt, daß $d(\lambda T-S)>0$ ist. Wir erklären also das "asymptotische Spektrum" dieses Paares (T,S) wie angekündigt in der

Definition 4.1.

(a) Es sei $D\subset X$ und $S,T\colon D\to Y$. Dann heißt die Menge

$$\sigma^D(T,S) := \{\lambda\in\mathbb{R} \mid \exists x\in D\setminus\{0\}\colon \lambda Tx-Sx=0\}$$

das *Spektrum des Paares (T,S) bez. D*, und jeder Wert $\lambda\in\sigma^D(T,S)$ heißt *Eigenwert des Paares (T,S) bez. D*.

(b) Für $S,T \in Q(\varphi,A,Y)$ heißt die Menge

$$\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid d(\varphi,A,Y)(\lambda T - S) = 0\}$$

das *φ-asymptotische Spektrum des Paares (T,S) bez. A*, und jeder Wert $\lambda \in \Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)$ heißt *φ-asymptotischer Eigenwert des Paares (T,S) bez. A.*

Sind keine Verwechslungen zu befürchten, so schreiben wir im folgenden an Stelle von $\sigma^{D}(T,S)$ bzw. $\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)$ auch kurz $\sigma(T,S)$ bzw. $\Sigma(T,S)$.

Für eine Obermenge $D_1 \subset X$ von $D_2 \subset X$ und Operatoren $S,T: D_1 \to Y$ umfaßt das Spektrum des Paares (T,S) bez. D_1 trivialerweise das Spektrum des Paares (T,S) bez. D_2. Eine entsprechende Aussage läßt sich ebenfalls für φ-asymptotische Spektren zeigen. Genauer gilt das

Lemma 4.2.

Es sei $A \subset B$ und $S,T \in Q(\varphi,B,Y)$. Dann folgt:

$S,T \in Q(\varphi,A,Y)$ und $\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S) \subset \Sigma_{\varphi}^{B}(T,S)$.

Beweis:

Aus $A \subset B$ und $S,T \in Q(\varphi,B,Y)$ können wir unmittelbar auf $S,T \in Q(\varphi,A,Y)$ schließen. Weiter wird für jedes $\lambda \in \Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)$:

$$0 = d(\varphi,A,Y)(\lambda T - S) = \underset{\|x\| \to \infty}{A\text{-lim inf}} \frac{\|\lambda Tx - Sx\|}{\varphi(\|x\|)}$$

$$\geq \underset{\|x\| \to \infty}{B\text{-lim inf}} \frac{\|\lambda Tx - Sx\|}{\varphi(\|x\|)} = d(\varphi,B,Y)(\lambda T - S) \geq 0,$$

d.h. $\lambda \in \Sigma_{\varphi}^{B}(T,S)$.

q.e.d.

Bei unseren Surjektivitätssätzen vom FREDHOLM Typ werden wir demnach bemüht sein, die Menge A so "klein" wie möglich zu halten.

Die beiden nächsten Lemmata liefern Schranken für die Beträge der φ-asymptotischen Eigenwerte sowie topologische Eigenschaften des φ-asymptotischen Spektrums.

Lemma 4.3.

Für alle $S,T\in Q$ und jedes $\lambda\in\Sigma(T,S)$ gilt:

(a) $|\lambda|\cdot d(T) \leq q(S)$.

(b) $d(S) \leq |\lambda|\cdot q(T)$.

(c) $[d(T)>0 \wedge \exists R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\geq R\colon \|Sx\|=\|Tx\|] \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Beweis:

Es seien $S,T\in Q$, $\lambda\in\Sigma(T,S)$ und daher $d(\lambda T-S)=0$.

Ad.(a): Wir erhalten mit Lemma 3.2(b),(d)

$$|\lambda|\cdot d(T)-q(S) = d(\lambda T)-q(-S) \leq d(\lambda T-S) = 0$$

und demnach die Behauptung.

Ad.(b): Wieder folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.2(b),(d):

$$d(S)-|\lambda|\cdot q(T) = d(-S)-q(\lambda T) \leq d(\lambda T-S) = 0.$$

Ad.(c): Es sei überdies $d(T)>0$, $R\in\mathbb{R}^+$ und die $\|Sx\|=\|Tx\|$ für jedes $x\in A$, $\|x\|\geq R$. Wegen $d(\lambda T-S)=0$ ist der

$$\text{A-lim inf}_{\|x\|\to\infty} \frac{\|\lambda Tx-Sx\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Also gibt es für alle $\varepsilon,r\in\mathbb{R}^+$, $r\geq\gamma$, ein $x\in A$, $\|x\|\geq r$, so daß die

$$\frac{\|\lambda Tx-Sx\|}{\varphi(\|x\|)} < \varepsilon$$

ist. Hieraus bekommen wir aber insbesondere die Existenz einer Folge $(x_n)\subset A$ mit

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon \|x_n\| \geq n+\gamma+R \wedge \frac{\|\lambda Tx_n-Sx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} < \frac{1}{n},$$

d.h.

$$(4.1)\qquad \forall n\in\mathbb{N}\colon \frac{\|Sx_n\|-|\lambda|\,\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \frac{1}{n}$$

und

$$(4.2)\qquad \forall n\in\mathbb{N}\colon \frac{|\lambda|\,\|Tx_n\|-\|Sx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \frac{1}{n}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß nach Voraussetzung die $\|Tx_n\|=\|Sx_n\|$ $(n\in\mathbb{N})$ ist, so ergeben die Ungleichungen (4.1) und (4.2):

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} - \frac{1}{n} \leq |\lambda| \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} + \frac{1}{n}$$

und weiter

$$(4.3) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq |\lambda| \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)}.$$

Zusammen mit

$$0 < d(T) = \text{A-}\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\|Tx\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)}$$

ist dann nach (4.3) der $|\lambda|=1$.

q.e.d.

Ist nun $d(T)>0$ bzw. $d(S)>0$, so liefert der Teil (a) von Lemma 4.3 eine Abschätzung für $|\lambda|$ nach oben bzw. der Teil (b) eine Abschätzung für $|\lambda|$ nach unten. Darüber hinaus gilt ein dem Teil (c) entsprechendes Resultat auch für Eigenwerte im üblichen Sinne:

Es sei $D \subset X$, $S,T: D \to Y$, $\lambda \in \sigma^D(T,S)$, und für alle $x \in D \setminus \{0\}$ sei $Tx \neq 0$ sowie die $\|Sx\| = \|Tx\|$. Dann folgt: $|\lambda|=1$. Denn ist x_0 ein Element aus $D \setminus \{0\}$ mit $\lambda Tx_0 - Sx_0 = 0$, so schließen wir unmittelbar auf $|\lambda| \|Tx_0\| = \|Sx_0\| = \|Tx_0\| \neq 0$.

Lemma 4.4.

Für alle $S,T \in Q$ gilt:

(a) $\Sigma(T,S)$ ist abgeschlossen.

(b) $d(T)>0 \Rightarrow \Sigma(T,S)$ ist kompakt.

Beweis:

Es seien $S,T \in Q$.

Ad.(a): Ist $\Sigma(T,S)=\phi$, so ist die Behauptung trivial. Demzufolge sei jetzt $(\lambda_n) \subset \Sigma(T,S)$ mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $d(\lambda_n T - S) = 0$ und daher nach Lemma 3.2(e) auch

$$0 \leq d(\lambda T - S) = |d(\lambda T - S) - d(\lambda_n T - S)| \leq q((\lambda T - S) - (\lambda_n T - S)) = |\lambda - \lambda_n| \cdot q(T) \to 0$$

für $n \to \infty$, d.h. $\lambda \in \Sigma(T,S)$.

Ad.(b): Es sei $d(T)>0$. Demnach ist mit Lemma 4.3(a) $\Sigma(T,S)$ beschränkt und ferner wegen Teil (a) auch abgeschlossen, also kompakt.

q.e.d.

Die beiden folgenden Lemmata haben für unsere weiteren Überlegungen keine allzu große Bedeutung. Sie sind jedoch im Zusammenhang mit den übrigen in diesem Paragraphen dargestellten Eigenschaften des φ-asymptotischen Spektrums nicht ohne Interesse.

Lemma 4.5.

Für alle $S,T \in Q$ und jedes $\mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\mu \neq 0 \Rightarrow \Sigma(T,\mu S) = \mu \cdot \Sigma(T,S)$.

(b) $[\Sigma(T,S) \neq \phi \wedge d(T)>0] \Rightarrow \Sigma(T,\mu S) = \mu \cdot \Sigma(T,S)$.

(c) $\Sigma(T,\mu T+S) = \mu + \Sigma(T,S)$.

Beweis:

Es seien $S,T \in Q$ und $\mu \in \mathbb{R}$.

Ad.(a): Für $\mu \neq 0$ ist

$$\lambda \in \Sigma(T,\mu S) \Leftrightarrow d(\lambda T-\mu S)=0 \Leftrightarrow |\mu| \cdot d(\tfrac{\lambda}{\mu}T-S)=0 \Leftrightarrow$$
$$d(\tfrac{\lambda}{\mu}T-S)=0 \Leftrightarrow \tfrac{\lambda}{\mu} \in \Sigma(T,S) \Leftrightarrow \lambda \in \mu \cdot \Sigma(T,S)$$

und daher $\Sigma(T,\mu S)=\mu \cdot \Sigma(T,S)$.

Ad.(b): Für $\mu \neq 0$ haben wir mit Teil (a) bereits alles bewiesen. Sei also $\mu=0$. Wegen $\Sigma(T,S) \neq \phi$ bleibt dann $\Sigma(T,0)=\{0\}$ zu zeigen. Dies ist aber der Fall, da wir aus $d(T)>0$ nach Voraussetzung sofort

$$\lambda=0 \Leftrightarrow |\lambda| \cdot d(T)=0 \Leftrightarrow d(\lambda T-0)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma(T,0)$$

erhalten.

Ad.(c): Es ist

$$\lambda \in \Sigma(T,\mu T+S) \Leftrightarrow d(\lambda T-\mu T-S)=0 \Leftrightarrow d((\lambda-\mu)T-S)=0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda-\mu \in \Sigma(T,S) \Leftrightarrow \lambda \in \mu+\Sigma(T,S)$$

und somit $\Sigma(T,\mu T+S)=\mu+\Sigma(T,S)$.

q.e.d.

Zum nächsten Lemma machen wir noch die folgenden Bemerkungen:

Sind $(X_1,\|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2,\|\cdot\|_{X_2})$ zwei normierte Räume, so wird das kartesische Produkt $X_1\times X_2$ (mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation versehen) durch die Definition

$$(4.4)\qquad \forall(x_1,x_2)\in X_1\times X_2:\quad \|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}:=\|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2}$$

bekanntlich gleichfalls ein normierter Raum und heißt die *direkte Summe* oder das *direkte Produkt* der normierten Räume $(X_1,\|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2,\|\cdot\|_{X_2})$ (vgl. [9], S.128). Nun ist dies aber offenbar nicht die einzige Möglichkeit, auf dem Vektorraum $X_1\times X_2$ eine Norm einzuführen. Deshalb sei festgestellt, daß wir ausschließlich die durch (4.4) erklärte Norm betrachten werden. Die dabei gewonnenen Ergebnisse gelten dann für alle Normen auf $X_1\times X_2$, die zu dieser äquivalent sind.

Lemma 4.6.

(a) Es seien $H_1:W\to X$ und $H_2:Y\to Z$ lineare Homöomorphismen und $S,T\in Q(a,A,Y)$. Dann folgt:

$H_2SH_1,H_2TH_1\in Q(a,H_1^{-1}(A),Z)$ und

$\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)=\Sigma_a^A(T,S)$.

(b) Es sei $a\geq 1$, $S_1,T_1\in Q(a,A_1,Y_1)$ beide beschränkt und $S_2,T_2\in Q(a,A_2,Y_2)$ beide beschränkt. Dann folgt:

$S_1\times S_2,T_1\times T_2\in Q(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)$ und

$\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)=\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)\cup\Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2)$.

Beweis:

Ad.(a): Zunächst ist unter den gemachten Voraussetzungen mit $A\subset X$ auch $H_1^{-1}(A)\subset W$ unbeschränkt.

(i) Wir zeigen: $H_2SH_1\in Q(a,H_1^{-1}(A),Z)$. Da $S\in Q(a,A,Y)$ und H_1 ein linearer Homöomorphismus von W auf X ist, schließen wir sofort auf

(4.5) $\exists b,c\in\mathbb{R}_0^+ \forall x\in A, \|x\|\geq b: \|Sx\| \leq c\|x\|^a$

und

(4.6) $\forall w\in H_1^{-1}(A), \|w\|\geq b\|H_1^{-1}\|_{L(X,W)}:$
$\|H_1 w\| \geq [\|H_1^{-1}\|_{L(X,W)}]^{-1}\|w\| \geq b.$

Ferner ist auch $H_2:Y\to Z$ linear und stetig, und zusammen mit (4.5) und (4.6) ergibt sich für alle $w\in H_1^{-1}(A)$, $\|w\|\geq b\cdot \|H_1^{-1}\|_{L(X,W)}$:

$$\|H_2SH_1w\| \leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}\|SH_1w\| \leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}c\|H_1w\|^a$$
$$\leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}c[\|H_1\|_{L(W,X)}]^a\|w\|^a.$$

Demnach ist aber $H_2SH_1\in Q(a,H_1^{-1}(A),Z)$.

(ii) Wir zeigen: $\Sigma_a^A(T,S)\subset\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)$. Sei hierzu $\lambda\in\Sigma_a^A(T,S)$ und also $d(a,A,Y)(\lambda T-S)=0$. Dann existiert eine Folge $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ mit $\|x_n\|\to\infty$ für $n\to\infty$ und

(4.7) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\lambda Tx_n-Sx_n\|}{\|x_n\|^a}=0.$$

Setzen wir nun $w_n:=H_1^{-1}x_n$ $(n\in\mathbb{N})$, so ist (w_n) eine Folge in $H_1^{-1}(A)\setminus\{0\}$ und die

(4.8) $\|w_n\| \geq [\|H_1\|_{L(W,X)}]^{-1}\|x_n\| \to\infty$ für $n\to\infty$.

Weiter erhalten wir für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda H_2TH_1w_n-H_2SH_1w_n\|}{\|w_n\|^a} = \frac{\|H_2(\lambda Tx_n-Sx_n)\|}{\|w_n\|^a}$$
$$\leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}[\|H_1\|_{L(W,X)}]^a\frac{\|\lambda Tx_n-Sx_n\|}{\|x_n\|^a}.$$

Unter Berücksichtigung von (4.7) und (4.8) wird somit

$$0 \leq d(a,H_1^{-1}(A),Z)(\lambda H_2TH_1-H_2SH_1)$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{\|\lambda H_2TH_1w_n-H_2SH_1w_n\|}{\|w_n\|^a} = 0$$

und daher $\lambda\in\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)$.

(iii) Wir zeigen: $\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1, H_2SH_1) \subset \Sigma_a^A(T,S)$. Definieren wir $\tilde{S} := H_2SH_1 : H_1^{-1}(A) \to Z$ und $\tilde{T} := H_2TH_1 : H_1^{-1}(A) \to Z$, dann sind nach Punkt (i) $\tilde{S}$ und $\tilde{T}$ aus $Q(a, H_1^{-1}(A), Z)$. Ferner ist $\tilde{H}_1 := H_1^{-1}$ ein linearer Homöomorphismus von X auf W und $\tilde{H}_2 := H_2^{-1}$ ein solcher von Z auf Y. Somit folgt zusammen mit Punkt (ii):

$$\begin{aligned}\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1, H_2SH_1) &= \Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(\tilde{T},\tilde{S}) \\ &\subset \Sigma_a^{\tilde{H}_1^{-1}H_1^{-1}(A)}(\tilde{H}_2\tilde{T}\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\tilde{S}\tilde{H}_1) \\ &= \Sigma_a^A(T,S).\end{aligned}$$

Ad.(b): Zunächst ist mit $A_1 \subset X_1$ oder $A_2 \subset X_2$ trivialerweise auch die Menge $A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$ unbeschränkt.

(i) Wir zeigen: $S_1 \times S_2 \in Q(a, A_1 \times A_2, Y_1 \times Y_2)$. Für $a \geq 1$ ist die Funktion $\|\cdot\|_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$\forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(t_1,t_2)\|_a := (|t_1|^a + |t_2|^a)^{1/a}$$

bekanntlich eine Norm auf $\mathbb{R}^2$. Die Dreiecksungleichung liefert demnach für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned}t_1^a + t_2^a = \|(t_1,t_2)\|_a^a &= \|(t_1,0)+(0,t_2)\|_a^a \\ &\leq [\|(t_1,0)\|_a + \|(0,t_2)\|_a]^a = (t_1+t_2)^a.\end{aligned}$$

Überdies gibt es für i=1,2 nach Voraussetzung Konstanten b_i, $c_i \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $x_i \in A_i$ mit $\|x_i\|_{X_i} \geq b_i$ die

$$\|S_i x_i\|_{Y_i} \leq c_i \|x_i\|_{X_i}^a$$

ist. Wegen der Beschränktheit von S_1 und S_2 wird nun für

$$M_i := \sup_{\|x_i\|_{X_i} < b_i}^{A_i} \|S_i x_i\|_{Y_i}$$

noch $M_i < \infty$ (i=1,2), und es existieren $b, c \in \mathbb{R}^+$ mit

$$c \geq \max\{c_1, c_2, \frac{M_2}{b_1^a}, \frac{M_1}{b_2^a}\} \quad \text{und} \quad 2cb^a \geq M_1 + M_2.$$

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir daher insgesamt für alle $(x_1,x_2) \in A_1 \times A_2$, $\|(x_1,x_2)\|_{X_1 \times X_2} \geq b$, im

Fall $\|x_1\|_{X_1}<b_1$ und $\|x_2\|_{X_2}<b_2$:

$$\begin{aligned}\|(S_1\times S_2)(x_1,x_2)\|_{Y_1\times Y_2} &= \|S_1x_1\|_{Y_1}+\|S_2x_2\|_{Y_2} \leq M_1+M_2\\ &\leq 2cb^a \leq 2c[\|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}]^a.\end{aligned}$$

Fall $\|x_1\|_{X_1}\geq b_1$ und $\|x_2\|_{X_2}<b_2$ (bzw. aus Symmetriegründen ganz analog im Fall $\|x_1\|_{X_1}<b_1$ und $\|x_2\|_{X_2}\geq b_2$):

$$\begin{aligned}\|(S_1\times S_2)(x_1,x_2)\|_{Y_1\times Y_2} &= \|S_1x_1\|_{Y_1}+\|S_2x_2\|_{Y_2}\\ &\leq c_1\|x_1\|_{X_1}{}^a+M_2\\ &\leq c\|x_1\|_{X_1}{}^a+cb_1{}^a\\ &\leq c\|x_1\|_{X_1}{}^a+c\|x_1\|_{X_1}{}^a\\ &= 2c\|x_1\|_{X_1}{}^a\\ &\leq 2c(\|x_1\|_{X_1}{}^a+\|x_2\|_{X_2}{}^a)\\ &\leq 2c(\|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2})^a\\ &= 2c[\|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}]^a.\end{aligned}$$

Fall $\|x_1\|_{X_1}\geq b_1$ und $\|x_2\|_{X_2}\geq b_2$:

$$\begin{aligned}\|(S_1\times S_2)(x_1,x_2)\|_{Y_1\times Y_2} &= \|S_1x_1\|_{Y_1}+\|S_2x_2\|_{Y_2}\\ &\leq c_1\|x_1\|_{X_1}{}^a+c_2\|x_2\|_{X_2}{}^a\\ &\leq c(\|x_1\|_{X_1}{}^a+\|x_2\|_{X_2}{}^a)\\ &\leq c(\|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2})^a\\ &\leq 2c[\|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}]^a.\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung ergibt dann $S_1\times S_2\in Q(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)$.

(ii) Wir zeigen: $\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)\subset(\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)\cup\Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2))$. Es sei also $\lambda\in\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)$ und folglich

$$d(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)(\lambda(T_1\times T_2)-(S_1\times S_2))=0.$$

Somit gibt es eine Folge $((x_1^n,x_2^n))$ in $A_1\times A_2\setminus\{(0,0)\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(\|x_1^n\|_{X_1}+\|x_2^n\|_{X_2})=\infty \tag{4.9}$$

und

$$(4.10)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1} + \|\lambda T_2 x_2^n - S_2 x_2^n\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a} = 0.$$

Ferner ist dabei für unendlich viele Indizes $n\in\mathbb{N}$ die $\|x_1^n\|_{X_1} \geq \|x_2^n\|_{X_2}$ oder die $\|x_2^n\|_{X_2} \geq \|x_1^n\|_{X_1}$. O.B.d.A. sei deshalb für alle $n\in\mathbb{N}$ die $\|x_1^n\|_{X_1} \geq \|x_2^n\|_{X_2}$ und demnach wegen

$$0 < \frac{1}{2}(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2}) \leq \|x_1^n\|_{X_1}$$

und (4.9) die

$$(4.11)\qquad \|x_1^n\|_{X_1} > 0 \ (n\in\mathbb{N}) \text{ und der } \lim_{n\to\infty} \|x_1^n\|_{X_1} = \infty.$$

Weiter ergibt sich für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1} + \|\lambda T_2 x_2^n - S_2 x_2^n\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a} \geq \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a}$$

$$\geq \frac{1}{2^a} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^{\,a}}.$$

Zusammen mit (4.11) und (4.10) bekommen wir nun

$$0 \leq d(a,A_1,Y_1)(\lambda T_1 - S_1) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^{\,a}} = 0$$

und schließlich $\lambda\in\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)$.

(iii) Wir zeigen: $(\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)\cup\Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2)) \subset \Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2, S_1\times S_2)$. Hierfür sei $\lambda\in\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)\cup\Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2)$. O.B.d.A. können wir dann sogar $\lambda\in\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)$ annehmen, d.h. $d(a,A_1,Y_1)(\lambda T_1 - S_1)=0$. Danach gibt es eine Folge $(x_1^n)\subset A_1\setminus\{0\}$ mit

$$(4.12)\qquad \lim_{n\to\infty} \|x_1^n\|_{X_1} = \infty$$

und

$$(4.13)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^{\,a}} = 0.$$

Darüber hinaus sei $x_2\in A_2$ beliebig, aber fest gewählt und für jedes $n\in\mathbb{N}$ $x_2^n := x_2$. Offenbar ist nun $((x_1^n,x_2^n))\subset A_1\times A_2\setminus\{(0,0)\}$ und der

$$(4.14)\qquad \lim_{n\to\infty} \|(x_1^n,x_2^n)\|_{X_1\times X_2} = \lim_{n\to\infty} (\|x_1^n\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2}) = \infty .$$

Außerdem erhalten wir für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda(T_1\times T_2)(x_1^n,x_2^n)-(S_1\times S_2)(x_1^n,x_2^n)\|_{Y_1\times Y_2}}{[\|(x_1^n,x_2^n)\|_{X_1\times X_2}]^a}$$

$$= \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1} + \|\lambda T_2 x_2 - S_2 x_2\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2})^a}$$

$$\leq \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a} + \frac{\|\lambda T_2 x_2 - S_2 x_2\|_{Y_2}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a}.$$

Demzufolge hat sich zusammen mit (4.14), (4.13) und (4.12) ergeben:

$$0 \leq d(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)(\lambda(T_1\times T_2)-(S_1\times S_2))$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda(T_1\times T_2)(x_1^n,x_2^n)-(S_1\times S_2)(x_1^n,x_2^n)\|_{Y_1\times Y_2}}{[\|(x_1^n,x_2^n)\|_{X_1\times X_2}]^a}$$

$$= 0,$$

d.h. $\lambda\in\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)$.

q.e.d.

Von besonderer Wichtigkeit für unsere weiteren Untersuchungen ist die Frage, in welchem Verhältnis die φ-asymptotischen Spektren $\Sigma(T,S)$ und $\Sigma(T_0,S_0)$ nichtlinearer Abbildungen S, S_0, T und T_0 aus Q stehen, deren Differenzen $S-S_0$ und $T-T_0$ in einem gewissen Sinne "klein" sind. Eine befriedigende Antwort hierauf gibt das

Lemma 4.7.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0\in Q$ mit $S\sim S_0$ und $T\sim T_0$. Dann folgt:

$\Sigma(T,S) = \Sigma(T_0,S_0)$.

(b) Es seien $S_0,T_0\in Q$, $d(T_0)>0$ und $V\subset\mathbb{R}$ eine (nach Lemma 4.4(b) stets existierende) offene Umgebung von $\Sigma(T_0,S_0)$. Dann folgt:

$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\forall S,T\in Q, q(S-S_0)<\varepsilon, q(T-T_0)<\varepsilon:\ \Sigma(T,S)\subset V$.

Beweis:

Ad.(a): Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q$ mit $S \sim S_0$, $T \sim T_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\lambda T - S = \lambda T_0 - S_0 + \lambda(T-T_0) + (S_0 - S)$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq q((\lambda T - S) - (\lambda T_0 - S_0)) &= q(\lambda(T-T_0) + (S_0 - S)) \\ &\leq |\lambda| \cdot q(T-T_0) + q(S_0 - S) = 0 \end{aligned}$$

und somit $(\lambda T - S) \sim (\lambda T_0 - S_0)$. Also erhalten wir zusammen mit Lemma 3.2(f):

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \; d(\lambda T - S) = d(\lambda T_0 - S_0).$$

Demnach ist aber $\Sigma(T,S) = \Sigma(T_0,S_0)$.

Ad.(b): Es seien $S_0,T_0 \in Q$, $d(T_0) > 0$ und $V \subset \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von $\Sigma(T_0,S_0)$. Ferner definieren wir $\varepsilon_0, M \in \mathbb{R}^+$ durch

$$\varepsilon_0 := \frac{d(T_0)}{2} \quad \text{und} \quad M := 1 + \frac{q(S_0)}{\varepsilon_0}.$$

(i) Wir zeigen: $\forall S,T \in Q, q(S-S_0) \leq \varepsilon_0, q(T-T_0) \leq \varepsilon_0 \; \forall \lambda \in \Sigma(T,S): \; |\lambda| \leq M$. Hierzu geben wir uns Abbildungen $S,T \in Q$ mit $q(S-S_0), q(T-T_0) \leq \varepsilon_0$ vor. Da nach Lemma 3.2(d)

$$\begin{aligned} d(T) = d(T - T_0 + T_0) &\geq d(T_0) - q(T-T_0) \geq d(T_0) - \varepsilon_0 \\ &= d(T_0) - \tfrac{1}{2} d(T_0) = \varepsilon_0 > 0 \end{aligned}$$

ist, bekommen wir zusammen mit Lemma 4.3(a) für jedes λ aus $\Sigma(T,S)$:

$$\begin{aligned} |\lambda| \leq \frac{q(S)}{d(T)} &\leq \frac{q(S - S_0 + S_0)}{\varepsilon_0} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}(q(S-S_0) + q(S_0)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_0 + q(S_0)) = 1 + \frac{q(S_0)}{\varepsilon_0} = M. \end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen: $\exists \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \forall S,T \in Q, q(S-S_0) < \varepsilon, q(T-T_0) < \varepsilon: \; \Sigma(T,S) \subset V$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, d.h.

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \exists S,T \in Q, q(S-S_0) < \varepsilon, q(T-T_0) < \varepsilon \exists \lambda \in \Sigma(T,S): \; \lambda \notin V.$$

Insbesondere ergibt sich hieraus unter Berücksichtigung von Punkt (i) für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz von Abbildungen $S_n, T_n \in Q$ und Werten

$$\lambda_n \in \Sigma(T_n,S_n) \setminus V \tag{4.15}$$

mit

$$|\lambda_n| \leq M \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} q(S_n - S_0) = 0 = \lim_{n\to\infty} q(T_n - T_0).$$

O.B.d.A. können wir dabei noch die Konvergenz der Folge (λ_n) voraussetzen, es sei also der

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n =: \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aus $d(\lambda_n T_n - S_n)=0$ $(n\in\mathbb{N})$ und Lemma 3.2(e) folgt dann für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |d(\lambda T_0 - S_0)| &= |d(\lambda T_0 - S_0) - d(\lambda_n T_n - S_n)| \\ &\leq q((\lambda T_0 - S_0) - (\lambda_n T_n - S_n)) \\ &\leq q(\lambda T_0 - \lambda_n T_n) + q(S_n - S_0) \\ &= q(\lambda T_0 - \lambda_n T_0 + \lambda_n T_0 - \lambda_n T_n) + q(S_n - S_0) \\ &\leq |\lambda - \lambda_n| \cdot q(T_0) + |\lambda_n| \cdot q(T_0 - T_n) + q(S_n - S_0) \\ &\leq |\lambda - \lambda_n| \cdot q(T_0) + M \cdot q(T_0 - T_n) + q(S_n - S_0) \to 0 \end{aligned}$$

für $n\to\infty$, d.h. $\lambda\in\Sigma(T_0,S_0)\subset V$. Weil aber V offen ist und die Folge (λ_n) gegen λ konvergiert, bedeutet dies einen Widerspruch zu (4.15).

q.e.d.

Diesen Paragraphen abschließend untersuchen wir noch Zusammenhänge zwischen den Spektren $\sigma(T,S)$ und $\Sigma(T,S)$.

Lemma 4.8.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0\in Q(a,A,Y)$, $S\sim S_0$, $T\sim T_0$ und

$$\forall x\in A \forall R\in\mathbb{R}^+ \exists t\in[R,\infty):$$
$$tx\in A,\ S_0(tx)=t^a S_0 x \text{ und } T_0(tx)=t^a T_0 x.$$

Dann folgt:

$$\sigma^A(T_0,S_0)\subset\Sigma_a^A(T,S).$$

(b) Es sei A abgeschlossen, I_A die Identität auf A, $S,S_0,T\in Q(1,A,X)$, $S\sim S_0$, $T\sim I_A$ und

$$\exists r,R\in\mathbb{R}^+ \forall x\in A, \|x\|\geq R:\quad r\frac{x}{\|x\|}\in A \text{ und } S_0\left(r\frac{x}{\|x\|}\right)=\frac{r}{\|x\|}S_0 x.$$

Ferner sei $S_0:A\to X$ vollstetig. Dann folgt:

$$\Sigma_1^A(T,S)\setminus\{0\}\subset\sigma^A(I_A,S_0)\setminus\{0\}.$$

(c) Es sei X ein reeller reflexiver BANACH-Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$, A schwach abgeschlossen, $S,S_0,T,T_0 \in Q(a,A,X^*)$, $S \sim S_0$, $T \sim T_0$ und

$$\exists r,R \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \geq R:$$
$$r\frac{x}{\|x\|} \in A,\ S_0(r\frac{x}{\|x\|}) = \frac{r^a}{\|x\|^a} S_0 x \text{ und } T_0(r\frac{x}{\|x\|}) = \frac{r^a}{\|x\|^a} T_0 x.$$

Ferner erfülle die Abbildung $\lambda T_0 - S_0 : A \to X^*$ die Bedingung (S) und sei halbstetig. Dann folgt:

$$\lambda \in \Sigma_a^A(T,S) \Rightarrow \lambda \in \sigma^A(T_0,S_0).$$

Beweis:

Ad.(a): Unter den gemachten Voraussetzungen sei $\lambda \in \sigma^A(T_0,S_0)$. Dann gibt es ein $x_0 \in A \setminus \{0\}$ mit $\lambda T_0 x_0 - S_0 x_0 = 0$, und vermöge Beispiel 3.4(a) ist $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0,S_0)$. Nach Lemma 4.7(a) gilt aber

$$\Sigma_a^A(T_0,S_0) = \Sigma_a^A(T,S),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Ad.(b): Zunächst ist offensichtlich $I_A \in Q(1,A,X)$ und demnach die Bedingung $T \sim I_A$ sinnvoll. Sei nun $\lambda \in \Sigma_1^A(T,S) \setminus \{0\}$. Wegen Lemma 4.7(a) ist dann auch $\lambda \in \Sigma_1^A(I_A,S_0) \setminus \{0\}$ und daher

$$d(1,A,X)(\lambda I_A - S_0) = 0.$$

Hiernach existiert eine Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \infty \text{ und } \lim_{n \to \infty} \frac{\|\lambda x_n - S_0 x_n\|}{\|x_n\|} = 0,$$

weshalb wir noch o.B.d.A. die $\|x_n\| \geq R$ $(n \in \mathbb{N})$ annehmen können. Setzt man jetzt $v_n := r\frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die $\|v_n\| = r$ und nach Voraussetzung $v_n \in A$ sowie

$$\lambda v_n - S_0 v_n = \lambda r\frac{x_n}{\|x_n\|} - S_0(r\frac{x_n}{\|x_n\|}) = r\frac{\lambda x_n - S_0 x_n}{\|x_n\|},$$

d.h. der

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda v_n - S_0 v_n\| = 0. \tag{4.16}$$

Ferner gibt es wegen der Vollstetigkeit von S_o eine Teilfolge (v_{n_k}) von (v_n) und ein $y\in X$ mit

$$\lim_{k\to\infty} S_o v_{n_k} = y. \tag{4.17}$$

Weiter bekommen wir aus (4.16) und (4.17) für jedes $k\in\mathbb{N}$:

$$\|\lambda v_{n_k} - y\| \leq \|\lambda v_{n_k} - S_o v_{n_k}\| + \|S_o v_{n_k} - y\| \to 0$$

für $k\to\infty$. Dies bedeutet aber

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = \frac{1}{\lambda} y \in A\setminus\{0\},$$

denn $\lambda\neq 0$, A ist abgeschlossen und die $\|v_{n_k}\| = r > 0$ $(k\in\mathbb{N})$. Zusammen mit (4.17) und der Stetigkeit von S_o wird demzufolge

$$\lambda(\frac{1}{\lambda}y) = y = \lim_{k\to\infty} S_o v_{n_k} = S_o(\lim_{k\to\infty} v_{n_k}) = S_o(\frac{1}{\lambda}y),$$

d.h. λ $(\neq 0)$ ist Eigenwert des Paares (I_A, S_o) bez. A.

Ad.(c): Es sei $\lambda\in\Sigma_a^A(T,S)$. Unter den getroffenen Voraussetzungen ist nach Lemma 4.7(a) somit gleichfalls $\lambda\in\Sigma_a^A(T_o,S_o)$ und damit $d(a,A,X^*)(\lambda T_o - S_o)=0$. Deshalb existiert eine Folge (x_n) in $A\setminus\{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_o x_n - S_o x_n\|}{\|x_n\|^a} = 0,$$

wobei wir o.B.d.A. die $\|x_n\| \geq R$ $(n\in\mathbb{N})$ annehmen wollen. Setzt man nun wieder $v_n := r\frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n\in\mathbb{N})$, dann ist $v_n\in A$, die $\|v_n\| = r$ und wegen der geforderten Homogenitätseigenschaften

$$\lambda T_o v_n - S_o v_n = \lambda T_o(r\frac{x_n}{\|x_n\|}) - S_o(r\frac{x_n}{\|x_n\|}) = r^a \frac{\lambda T_o x_n - S_o x_n}{\|x_n\|^a},$$

d.h. der

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda T_o v_n - S_o v_n\| = 0. \tag{4.18}$$

Da überdies der Raum X reflexiv und die Menge A schwach abgeschlossen ist, gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}) von (v_n) und ein $v_o\in A$ mit (vgl. Satz[1], [80], S.126)

(4.19) $\quad \|v_{n_k}\| = r \ (k \in \mathbb{N})$ und $v_{n_k} \to v_o$ für $k \to \infty$.

Danach gilt zusammen mit (4.18) für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$|([\lambda T_o v_{n_k} - S_o v_{n_k}] - [\lambda T_o v_o - S_o v_o], v_{n_k} - v_o)|$$

$$\leq \|\lambda T_o v_{n_k} - S_o v_{n_k}\| (r + \|v_o\|) + |(\lambda T_o v_o - S_o v_o, v_{n_k} - v_o)| \to 0$$

für $k \to \infty$. Die Abbildung $\lambda T_o - S_o : A \to X^*$ erfüllt aber die Bedingung (S), so daß wir sogar $v_{n_k} \to v_o$ $(k \to \infty)$ und daher wegen (4.19) noch $\|v_o\| = r > 0$ erhalten. Schließlich liefert die Halbstetigkeit von $\lambda T_o - S_o : A \to X^*$

$$\lambda T_o v_{n_k} - S_o v_{n_k} \to \lambda T_o v_o - S_o v_o \text{ für } k \to \infty, \ v_o \in A \setminus \{0\},$$

woraus mit (4.18)

$$\lambda T_o v_o - S_o v_o = 0, \ v_o \in A \setminus \{0\}$$

und also $\lambda \in \sigma^A(T_o, S_o)$ folgt.

q.e.d.

Ist speziell A ein abgeschlossener Unterraum von X, I_A die Identität auf A und $L : A \to X$ linear und vollstetig (insbesondere sind also $I_A, L \in Q(1, A, X)$), so wird nach Lemma 4.8(a),(b)

$$\Sigma_1^A(I_A, L) \setminus \{0\} = \sigma^A(I_A, L) \setminus \{0\}.$$

Bemerkung 4.9.

Es sei X ein reeller BANACH-Raum und L eine lineare und stetige Abbildung von X in X. Die Menge

$$R(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda I - L : X \to X \text{ ist bijektiv}\}$$

heißt dann üblicherweise die *Resolventenmenge* von L (nach dem "Satz vom inversen Operator" ist also für $\lambda \in R(L)$ die Abbildung $(\lambda I - L)^{-1} : X \to X$ stetig). Ferner bezeichnet man unter diesen Umständen - in Abweichung zur Definition 4.1(a) - das Komplement

$$S(L) := \mathbb{R} \setminus R(L)$$

von R(L) bez. $\mathbb{R}$ als das *Spektrum* von L (vgl. [28], S.100). Damit folgt (vgl. [14]):

$$\Sigma_1^X(I, L) \subset S(L).$$

Ist darüber hinaus der Operator $L:X\to X$ sogar vollstetig, so läßt sich außerdem

$$\Sigma_1^X(I,L) = S(L)$$

zeigen (vgl. [14]).

Im übrigen können die Verhältnisse recht unterschiedlich sein. Betrachten wir hierzu einmal den Raum $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$. Definiert man dann $S,T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $Sx:=x/(1+x^2)$ und $Tx:=x$ $(x\in\mathbb{R})$, so sind offenbar $S,T\in Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und wegen

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda Tx-Sx = (\lambda-\frac{1}{1+x^2})x$$

erhalten wir $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)=\{0\}$ sowie $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=(0,1)$. Insbesondere ist also $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ nicht abgeschlossen und $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)\cap\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\phi$.

Erklären wir dagegen $S,T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vermöge $Sx:=Tx:=\sqrt[4]{|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$, dann sind S und T ebenfalls Elemente von $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und aus

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda Tx-Sx = (\lambda-1)\sqrt[4]{|x|}$$

folgt sowohl $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)=\mathbb{R}$ als auch $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\{1\}$, d.h. $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ ist eine echte Teilmenge von $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)$.

Legen wir schließlich die Abbildungen $S,T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ über $Sx:=x$ und $Tx:=1$ $(x\in\mathbb{R})$ fest, so sind gleichfalls $S,T\in Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und zusammen mit

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda Tx-Sx = \lambda-x$$

ergibt sich für die beiden Spektren: $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)=\phi$ und $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, d.h. $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)$ ist eine echte Teilmenge von $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$. Oberdies ist $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ nicht abgeschlossen.

§ 5. EIN EXISTENZSATZ

In diesem Paragraphen werden wir u.a. einen neuen Existenzsatz vom BORSUK Typ formulieren und beweisen (Satz 5.2). Wie sich später zeigen wird, stellt dieser Satz ein für unsere Zwecke besonders geeignetes Kriterium dar, um die Lösbarkeit von gewissen Operatorgleichungen der Form

$$\lambda Tx - Sx = y$$

(S und T sind Elemente eines passenden Raumes Q) zu sichern. Er ist somit von grundlegender Bedeutung.

Für den gesamten Abschnitt setzen wir nun folgendes voraus:

Es sei X ein reeller, reflexiver und separabler BANACH-Raum, $\Omega,\Delta\subset X$, Ω offen und beschränkt, Δ schwach abgeschlossen, und es gelte $0\in\Omega\subset\Delta$. Insbesondere ist dann die abgeschlossene Hülle $\overline{\Omega}$ von Ω bez. X ebenfalls in Δ enthalten. Den Rand von Ω bez. X benennen wir $\partial\Omega$. Ferner sei $D=\{d_j \mid j\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbare und in X dicht liegende Teilmenge von X.

Damit definieren wir für jedes $n\in\mathbb{N}$ noch

$$X_n := [d_1,\ldots,d_n],$$

d.h. X_n ist der von den Elementen $d_1,\ldots,d_n$ aufgespannte endlichdimensionale Unterraum von X. Wir bekommen dann sofort

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad X_n\subset X_{n+1} \quad \text{und} \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}=X.$$

Darüber hinaus sei für alle $n\in\mathbb{N}$ i_n die Einbettung von X_n in X, also

$$i_n: X_n\to X \quad \text{und} \quad \forall x\in X_n: \; i_n(x)=x.$$

Da i_n offenbar linear und stetig ist, trifft dies auch für den zu i_n dualen Operator

$$i_n^* : X^*\to X_n^*$$

zu (vgl. Satz[4.13.1], [9], S.172). Außerdem ist klar, daß für jedes $f\in X^*$ $i_n^*(f)$ die Einschränkung von f auf X_n bedeutet, d.h.

$$\|f\|_{X_n^*} := \|i_n^*(f)\|_{X_n^*} := \sup_{\substack{X_n \\ \|x\|=1}} \|f(x)\|$$

$$\leq \sup_{\substack{X \\ \|x\|=1}} \|f(x)\| =: \|f\|_{X^*}.$$

Schließlich gibt es zu allen $n\in\mathbb{N}$ wegen $\dim(X_n)=\dim(X_n^*)\leq n$ (vgl. Satz[28.4], [47], S.213) einen linearen Homöomorphismus von X_n^* auf X_n (vgl. Lemma[23.1], [47], S.167), den wir mit h_n bezeichnen wollen:

$$h_n: X_n^* \to X_n \text{ linear und homöomorph.}$$

Unter diesen getroffenen Vereinbarungen gilt nun das

Lemma 5.1.

Die Abbildung $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ erfülle die fünf nachstehenden Voraussetzungen:

(i) $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to X^*$ ist halbstetig.

(ii) $\forall t\in[0,1]\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall s\in[0,1], |s-t|<\delta\forall x\in\partial\Omega$:
$\|H(s,x)-H(t,x)\|_{X^*} < \varepsilon$.

(iii) $\forall t\in[0,1]$: $H(t,\cdot):\overline{\Omega}\to X^*$ ist beschränkt.

(iv) $\forall t\in[0,1]$: $H(t,\cdot):\Delta\to X^*$ genügt der Bedingung (S).

(v) $\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega$: $H(t,x)\neq 0$.

Dann folgt:

(a) $\exists m\in\mathbb{R}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega\cap X_n$: $\|H(t,x)\|_{X_n^*}\geq m$.

(b) $\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\exists z_n\in\mathbb{Z}\forall t\in[0,1]$:
$\deg(h_n i_n^* H(t,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0) = z_n$.

Beweis:

Ad.(a): (I) Wir zeigen:

$$\forall t\in[0,1]\exists m_t\in\mathbb{R}^+\exists n_t\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_t\forall x\in\partial\Omega\cap X_n:$$
$$\|H(t,x)\|_{X_n^*}\geq m_t.$$

Hierzu nehmen wir an, die Aussage sei falsch, d.h.

$$\exists t_0\in[0,1]\forall m\in\mathbb{R}^+\forall n_0\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\exists x\in\partial\Omega\cap X_n:$$
$$\|H(t_0,x)\|_{X_n^*} < m.$$

Dann gibt es Folgen $(n_k)\subset\mathbb{N}$ und (x_{n_k}) mit

$$\forall k\in\mathbb{N}:\quad n_k<n_{k+1}\quad\text{und}\quad x_{n_k}\in\partial\Omega\cap X_{n_k}$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty}\|H(t_o,x_{n_k})\|_{X^*_{n_k}}=0. \tag{5.1}$$

Insbesondere ist (x_{n_k}) also in $\overline{\Omega}\subset\Delta$ enthalten und damit beschränkt. Wegen der Reflexivität des Raumes X können wir deshalb o.B.d.A. voraussetzen, daß (x_{n_k}) schwach konvergiert (vgl. Satz[1], [80], S.126), d.h.

$$\exists x_o\in X:\quad x_{n_k}\rightharpoonup x_o\ \text{für}\ k\to\infty. \tag{5.2}$$

Nun ist aber Δ schwach abgeschlossen und somit $x_o\in\Delta$. Weiter ergibt sich wegen $n_k<n_{k+1}$ noch

$$X_{n_k}\subset X_{n_{k+1}}\quad(k\in\mathbb{N})\quad\text{und}\quad D_o:=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_{n_k}=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n.$$

Demnach liegt auch D_o dicht in X. Ist daher für jedes $k\in\mathbb{N}$ nach dem "Fundamentalsatz der Approximationstheorie" (vgl. Satz[10.2], [47], S.72) ein $v_k\in X_{n_k}$ derart gewählt, daß die

$$\|v_k-x_o\|=\inf_{x\in X_{n_k}}\|x-x_o\|$$

ist, so folgt:

$$v_k\to x_o\ \text{für}\ k\to\infty. \tag{5.3}$$

Schließlich wird - da schwach bzw. stark konvergente Folgen beschränkt sind - mit (5.2) und (5.3)

$$M_1:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|x_{n_k}-v_k\|<\infty$$

sowie mit Voraussetzung (iii)

$$M_2:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|H(t_o,x_{n_k})\|_{X^*}<\infty,$$

und wir erhalten für jedes $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&|(H(t_o,x_{n_k})-H(t_o,x_o),x_{n_k}-x_o)|\\&\quad\le|(H(t_o,x_{n_k}),x_{n_k}-v_k+v_k-x_o)|+|(H(t_o,x_o),x_{n_k}-x_o)|\end{aligned}$$

$$\leq |(H(t_o,x_{n_k}),x_{n_k}-v_k)| + |(H(t_o,x_{n_k}),v_k-x_o)| +$$
$$+ |(H(t_o,x_o),x_{n_k}-x_o)|$$
$$\leq \|H(t_o,x_{n_k})\|_{X_{n_k}^*} \|x_{n_k}-v_k\| + \|H(t_o,x_{n_k})\|_{X^*} \cdot$$
$$\cdot \|v_k-x_o\| + |(H(t_o,x_o),x_{n_k}-x_o)|$$
$$\leq \|H(t_o,x_{n_k})\|_{X_{n_k}^*} \cdot M_1 + M_2 \cdot \|v_k-x_o\| +$$
$$+ |(H(t_o,x_o),x_{n_k}-x_o)| \to 0$$

für $k\to\infty$ wegen (5.1), (5.2) und (5.3). Zusammen mit Voraussetzung (iv) ergibt sich damit

$$x_{n_k}\to x_o \text{ für } k\to\infty \text{ und } x_o\in\partial\Omega,$$

denn $\partial\Omega$ ist abgeschlossen. Sei nun $v\in D_o$ beliebig, etwa $v\in X_{n_{\tilde{k}}}$, aber fest gewählt. Dann ist für jedes $k\in\mathbb{N}$, $k\geq\tilde{k}$, auch $v\in X_{n_k}$ und also

$$|(H(t_o,x_o),v)| \leq |(H(t_o,x_o)-H(t_o,x_{n_k}),v)| +$$
$$+ |(H(t_o,x_{n_k}),v)|$$
$$\leq |(H(t_o,x_o)-H(t_o,x_{n_k}),v)| +$$
$$+ \|H(t_o,x_{n_k})\|_{X_{n_k}^*} \cdot \|v\| \to 0$$

für $k\to\infty$ nach Voraussetzung (i) und (5.1).

Wir fassen zusammen: Für alle v aus der in X dicht liegenden Menge D_o ist $(H(t_o,x_o),v)=0$. Ferner ist $H(t_o,x_o)$ ein lineares stetiges Funktional auf X und somit sogar für jedes $v\in X$ $(H(t_o,x_o),v)=0$. Da $x_o\in\partial\Omega$ war, bedeutet dies einen Widerspruch zur Voraussetzung (v).

(II) Wir zeigen:

$$\exists m\in\mathbb{R}^+ \exists n_o\in\mathbb{N} \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_o \forall t\in[0,1] \forall x\in\partial\Omega\cap X_n:$$
$$\|H(t,x)\|_{X_n^*} \geq m.$$

Für jedes $t\in[0,1]$ seien $m_t\in\mathbb{R}^+$ und $n_t\in\mathbb{N}$ nach Teil (I) gewählt, d.h.

$$\forall t\in[0,1] \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_t \forall x\in\partial\Omega\cap X_n: \|H(t,x)\|_{X_n^*} \geq m_t.$$

Weiter gibt es wegen Voraussetzung (ii) zu jedem $t\in[0,1]$ ein $\delta_t\in\mathbb{R}^+$ mit

$$\forall s\in[0,1],|s-t|<\delta_t\,\forall x\in\partial\Omega:\quad \|H(s,x)-H(t,x)\|_{X^*}<\frac{m_t}{2}.$$

Die Menge

$$\{U_{\delta_t}(t):=(t-\delta_t,t+\delta_t)\mid t\in[0,1]\}$$

bildet dann eine offene Oberdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$ und enthält daher eine endliche Teilüberdeckung von $[0,1]$, etwa

$$\{U_{\delta_{t_1}}(t_1),U_{\delta_{t_2}}(t_2),\ldots,U_{\delta_{t_k}}(t_k)\}.$$

Hierfür setzen wir

$$m:=\frac{1}{2}\min_{1\le j\le k} m_{t_j}>0 \quad\text{und}\quad n_o:=\max_{1\le j\le k} n_{t_j}.$$

Ist jetzt $t\in[0,1]$ beliebig, aber fest gewählt, so gibt es ein $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ mit $t\in U_{\delta_{t_j}}(t_j)$, und es folgt für jedes $n\in\mathbb{N}$, $n\ge n_o$ und alle $x\in\partial\Omega\cap X_n$:

$$\begin{aligned}\|H(t,x)\|_{X_n^*}&\ge\|H(t_j,x)\|_{X_n^*}-\|H(t_j,x)-H(t,x)\|_{X_n^*}\\&\ge m_{t_j}-\|H(t_j,x)-H(t,x)\|_{X^*}\\&>m_{t_j}-\frac{1}{2}m_{t_j}=\frac{1}{2}m_{t_j}\ge m.\end{aligned}$$

Ad.(b): Für jedes $n\in\mathbb{N}$ definieren wir eine Abbildung

$$f_n:[0,1]\times\overline{\Omega}\cap X_n\to X_n$$

durch

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}\cap X_n:\quad f_n(t,x):=h_n i_n^* H(t,i_n(x)).$$

Die Menge $\overline{\Omega}\cap X_n$ ist dann abgeschlossen in X_n und enthält somit die abgeschlossene Hülle von $\Omega\cap X_n$ bez. X_n, während $\Omega\cap X_n$ selbst trivialerweise offen in X_n ist. Ferner bezeichne $\partial_{X_n}(\Omega\cap X_n)$ den Rand von $\Omega\cap X_n$ bez. X_n. Oberdies ist die Abbildung

$$[0,1]\times\overline{\Omega}\cap X_n\ni(t,x)\mapsto H(t,i_n(x))\in X^*$$

nach Voraussetzung (i) halbstetig und der Operator $i_n^*:X^*\to X_n^*$

als stetige lineare Abbildung schwachstetig (vgl. Lemma[13.5], [28], S.62), d.h. auch die Komposition

$$(5.4) \qquad [0,1]\times\bar{\Omega}\cap X_n \ni (t,x) \mapsto i_n^* H(t,i_n(x)) \in X_n^*$$

ist halbstetig. Da aber X_n ein endlichdimensionaler Raum ist, erhalten wir für (5.4) sogar die Stetigkeit (vgl. Satz[4], [81], S.156). Also ist auch die Abbildung

$$f_n : [0,1]\times\bar{\Omega}\cap X_n \to X_n$$

stetig und damit vor allem für jedes $t\in[0,1]$ und alle

$$y\in X_n \setminus f_n(t,\cdot)(\partial_{X_n}(\Omega\cap X_n))$$

der

$$\deg(f_n(t,\cdot),\Omega\cap X_n,y)$$

wohldefiniert. Schließlich gibt es wegen

$$\partial_{X_n}(\Omega\cap X_n) \subset (\bar{\Omega}\cap X_n)\setminus(\Omega\cap X_n) = ((\bar{\Omega}\cap X_n)\setminus\Omega)\cup((\bar{\Omega}\cap X_n)\setminus X_n)$$

$$= (\bar{\Omega}\cap X_n)\setminus\Omega = (\bar{\Omega}\setminus\Omega)\cap X_n = \partial\Omega\cap X_n$$

und Teil (a) ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \forall t\in[0,1]\forall x\in\partial_{X_n}(\Omega\cap X_n):$$

$$\| i_n^* H(t,i_n(x))\|_{X_n^*} = \|H(t,x)\|_{X_n^*} > 0$$

und somit

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \forall t\in[0,1]\forall x\in\partial_{X_n}(\Omega\cap X_n): \quad f_n(t,x) \neq 0.$$

Demnach ergibt die Homotopieinvarianz des BROUWERschen Abbildungsgrades (vgl. Satz[1], [4], S.39), daß für jedes $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, der

$$\deg(f_n(t,\cdot),\Omega\cap X_n,0)$$

konstant auf [0,1] ist.

q.e.d.

Wie der Beweis zeigt, könnten wir die Voraussetzungen des letzten Lemmas auch etwas abschwächen. Für unsere Zwecke wird sich allerdings die hier gewählte Formulierung als völlig ausreichend erweisen. Ferner möchten wir an dieser Stelle noch bemerken, daß das Lemma 5.1 nicht nur für den Beweis des fol-

genden Existenzsatzes von Bedeutung ist, sondern darüber hinaus in den §§ 7 und 13 seine Anwendung finden wird.

Satz 5.2. (Existenzsatz vom BORSUK Typ)

Es seien Ω und Δ beide symmetrisch, und die Abbildung $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ erfülle die fünf nachstehenden Voraussetzungen:

(i) $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to X^*$ ist halbstetig.

(ii) $\forall t\in[0,1]\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall s\in[0,1],|s-t|<\delta\forall x\in\partial\Omega$:
$\|H(s,x)-H(t,x)\|_{X^*}<\varepsilon$.

(iii) $\forall t\in[0,1]$: $H(t,\cdot):\overline{\Omega}\to X^*$ ist beschränkt.

(iv) $\forall t\in[0,1]$: $H(t,\cdot):\Delta\to X^*$ genügt der Bedingung (S).

(v) $\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega$: $H(t,x)\neq 0$.

Ferner erfülle $G:[0,1]\times\Delta\to X^*$ definiert durch

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times\Delta:\quad G(t,x):=H(1,x)-tH(1,-x)$$

noch die Bedingungen

(vi) $\forall t\in[0,1]$: $G(t,\cdot):\Delta\to X^*$ genügt der Bedingung (S)

und

(vii) $\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega$: $G(t,x)\neq 0$.

Dann folgt:

(a) $\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0$: $\deg(h_n i_n^* H(0,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0)\neq 0$.

(b) $\exists x\in\Omega$: $H(0,x)=0$.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, daß die Abbildung $G:[0,1]\times\Delta\to X^*$ wegen der Symmetrie von Δ wohldefiniert ist. Außerdem ist mit Ω auch $\overline{\Omega}$ symmetrisch.

Ad.(a): Nach Lemma 5.1(b)

(5.5) $\exists n_1\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_1$:

$$\deg(h_n i_n^* H(0,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0)=$$
$$=\deg(h_n i_n^* H(1,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0).$$

Weiter verifizieren wir jetzt für die Abbildung G die Voraussetzungen von Lemma 5.1:

Aus der Halbstetigkeit bzw. der Beschränktheit von $H(1,\cdot):\overline{\Omega}\to X^*$ sowie der Symmetrie von $\overline{\Omega}$ folgt unmittelbar die Halbstetigkeit bzw. die Beschränktheit von $G:[0,1]\times\overline{\Omega}\to X^*$, und es ist

$$0 < M := \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|H(1,-x)\|_{X^*} + 1 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|H(1,x)\|_{X^*} + 1 < \infty .$$

Seien nun $t\in[0,1]$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Wir setzen $\delta:=\varepsilon/M$ und bekommen für alle $s\in[0,1]$ mit $|s-t|<\delta$ und jedes $x\in\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}\|G(s,x)-G(t,x)\|_{X^*} &= \|H(1,x)-sH(1,-x)-H(1,x)+\\ &\qquad +tH(1,-x)\|_{X^*}\\ &= |s-t|\cdot\|H(1,-x)\|_{X^*} < \delta\cdot M = \varepsilon .\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir also noch die hier gestellten Bedingungen (vi) und (vii), so genügt $G:[0,1]\times\Delta\to X^*$ insgesamt den Erfordernissen von Lemma 5.1 und demnach

$$\begin{aligned}&\exists n_2\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2\,\exists z_n\in\mathbb{Z}\,\forall t\in[0,1]:\\ &\deg(h_n i_n^* G(t,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0) = z_n .\end{aligned}$$

Speziell für $t=0;1$ ergibt sich daher

(5.6) $$\begin{aligned}&\exists n_2\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2:\\ &\deg(h_n i_n^* H(1,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0) =\\ &\qquad = \deg(h_n i_n^* G(1,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0).\end{aligned}$$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist aber offensichtlich $\Omega\cap X_n$ symmetrisch, $0\in\Omega\cap X_n$ und die Abbildung

$$h_n i_n^* G(1,i_n(\cdot)) = h_n i_n^*(H(1,i_n(\cdot))-H(1,i_n(-\cdot))):\overline{\Omega}\cap X_n\to X_n$$

ungerade, so daß wir nach dem Satz von BORSUK (vgl. Satz[1], [4], S.46) schließlich

(5.7) $$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2:\quad \deg(h_n i_n^* G(1,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0)\neq 0$$

erhalten. Fassen wir abschließend (5.5), (5.6) und (5.7) zusammen, so folgt

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0:=\max\{n_1,n_2\}:\ \deg(h_n i_n^* H(0,i_n(\cdot)),\Omega\cap X_n,0)\neq 0$$

und somit die Behauptung.

Ad.(b): Aus einer bekannten Eigenschaft des BROUWERschen Abbildungsgrades hinsichtlich der Lösbarkeit von Gleichungen (vgl. Satz[1], [4], S.39) ergibt sich zusammen mit Teil (a):

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \exists x_n \in \Omega \cap X_n : \; \| h_n i_n^* H(0, i_n(x_n)) \| = 0.$$

Nach Definition der Abbildungen $h_n : X_n^* \to X_n$, $i_n : X_n \to X$ und $i_n^* : X^* \to X_n^*$ ist dann aber auch für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$, die

$$\| H(0, x_n) \|_{X_n^*} = 0.$$

Oberdies gibt es wegen der Reflexivität des Raumes X eine Teilfolge (x_{n_k}) von $(x_n)_{n \geq n_o} \subset \Omega \subset \Delta$ und ein $x_o \in X$ mit

$$x_{n_k} \to x_o \text{ für } k \to \infty$$

und

$$n_o \leq n_k < n_{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit läßt sich genau wie im Beweis von Lemma 5.1(a), Teil (I), sogar $x_{n_k} \to x_o \in \overline{\Omega}$ für $k \to \infty$ und weiter

$$\forall v \in X: \; (H(0, x_o), v) = 0$$

zeigen. Der Voraussetzung (v) entsprechend muß deshalb x_o in Ω liegen, und es ist alles bewiesen.

q.e.d.

§ 6. SÄTZE VOM FREDHOLM TYP

Mit den bisher geleisteten Vorarbeiten ist es uns nunmehr möglich, die angestrebten FREDHOLMschen Sätze - darunter auch alternative Aussagen - für Abbildungen der Form $\lambda T - S$ aus einem noch näher zu bestimmenden Raum $Q(\varphi, A, Y)$ herzuleiten. Wie bereits erwähnt, werden wir dabei als Bildraum Y stets den zum zugrundeliegenden Raum X dualen Raum X^* annehmen. Ferner müssen die Bedingungen an X selbst, an die Menge A und an die Funktion φ über das bisher Übliche hinaus verschärft werden und die Operatoren S und T auf ganz X definiert sein. Die sich

dann ergebenden Resultate sind - insbesondere hinsichtlich des Parameters λ - optimal, d.h. unter den gestellten Voraussetzungen nicht zu verbessern.

Im einzelnen fordern wir grundsätzlich für den ganzen Abschnitt:

Es sei X ein reeller, reflexiver und separabler BANACH-Raum und (Ω_k) ein Folge von Teilmengen von X mit

$$\forall k \in \mathbb{N}:$$
$$\Omega_k \text{ ist offen, beschränkt, symmetrisch und } 0 \in \Omega_k.$$

Darüber hinaus verlangen wir, daß für

$$m_k := \inf_{x \in \partial\Omega_k} \|x\| \quad (k \in \mathbb{N})$$

($\partial\Omega_k$ bezeichne den Rand von Ω_k bez. X) der

$$\lim_{k \to \infty} m_k = \infty \tag{6.1}$$

ist. Schließlich sei A eine symmetrische Teilmenge von X mit

$$A \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k$$

und $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion, die der Bedingung

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty \tag{6.2}$$

genügt.

Unter den so getroffenen Vereinbarungen stellen wir sofort fest, daß die Menge A unbeschränkt und jede konstante Abbildung $f: X \to X^*$ Element des Unterraumes $N(\varphi,A,X^*)$ von $Q(\varphi,A,X^*)$ ist. Sind weiter $x \in X \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt und hierfür

$$t_k := \sup\{t \in \mathbb{R}_0^+ \mid \forall s \in [0,t]: sx \in \Omega_k\},$$

so wird $0 < t_k < \infty$ und

$$t_k x \in (X \setminus \Omega_k) \cap (X \setminus (X \setminus \overline{\Omega}_k)) = (X \setminus \Omega_k) \cap \overline{\Omega}_k = X \cap (\overline{\Omega}_k \setminus \Omega_k) = \partial\Omega_k.$$

Vor allem ergibt die $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ den ganzen Raum X. Auch können wir - ohne im Einzelfall ausdrücklich darauf hinzuweisen - für A=X stets $\Omega_k := \{x \in X \mid \|x\| < k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ wählen. Überdies erlauben es die

zusätzlich gemachten Einschränkungen nach wie vor, daß selbst Abbildungen $f:X\to X^*$, $f\in N(\varphi,A,X^*)$, "stark nichtlinear" sind. Denn setzen wir etwa für festes $y_0\in X^*$ $\Omega_k:=\{x\in X\mid \|x\|<k\pi\}$ $(k\in\mathbb{N})$, $A:=\overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}}\partial\Omega_k=\{x\in X\mid \exists k\in\mathbb{N}\colon \|x\|=k\pi\}$ und $f(x):=e^{\|x\|}\cdot\sin(\|x\|)\cdot y_0$ $(x\in X)$, so ist $f\in N(\varphi,A,X^*)$ bei beliebigen zugelassenen X und φ.

Als erstes Ergebnis erhalten wir nun den

Satz 6.1. (Satz vom FREDHOLM Typ)

Es seien $S,S_0,T,T_0:X\to X^*$, S und S_0 vollstetig, T und T_0 halbstetig und beschränkt, $S,S_0,T,T_0\in Q(\varphi,A,X^*)$, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T+t(T_0-T):X\to X^*$ die Bedingung (S).

(a) Ist noch T_0 ungerade und $d(\varphi,A,X^*)(T_0)>0$, dann folgt:

Für jedes λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)\cup\{0\})$ mit

$$q(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d(\varphi,A,X^*)(\lambda T_0-S_0) \tag{6.3}$$

oder

$$q(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S) \tag{6.4}$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:X\to X^*$ gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

(b) Ist noch S_0 ungerade, $d(\varphi,A,X^*)(S_0)>0$ und genügt für jedes $t\in[0,1]$ die Abbildung $T_0-tT_0(-\cdot):X\to X^*$ der Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda\neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R}\setminus\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)$ mit

$$q(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d(\varphi,A,X^*)(\lambda T_0-S_0)$$

oder

$$q(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S)$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:X\to X^*$ gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

Beweis:

Ad.(a): Aus $d(T_0)>0$ folgt sofort mit Lemma 4.4(b), daß das φ-asymptotische Spektrum $\Sigma(T_0,S_0)$ kompakt ist. Demnach besitzt

die Menge $\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)\cup\{0\})$ genau zwei unbeschränkte Komponenten. Es seien also jetzt λ aus solch einer unbeschränkten Komponente mit (6.3) oder (6.4) und $y\in X^*$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es ein $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\operatorname{sign}(\mu)=\operatorname{sign}(\lambda)$ und

$$(6.5)\qquad |\lambda+\mu| > \frac{q(S_0)}{d(T_0)}.$$

Damit definieren wir $H:[0,1]\times X\to X^*$ durch

$$H(t,\cdot) := \begin{cases} \lambda T_0-S_0+(1-2t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y) & \text{für } 0\le t\le\frac{1}{2}, \\ (\lambda+(2t-1)\mu)T_0-S_0 & \text{für } \frac{1}{2}<t\le 1 \end{cases}$$

und zeigen: H erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 3.5(b).

Offenbar ist für jedes $t\in[0,1]$ $H(t,\cdot)\in Q$, und wegen $q(y)=0$ erhalten wir nach Lemma 3.2(d) für alle $t\in[0,\frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot)) &\ge d(\lambda T_0-S_0)-(1-2t)q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y) \\ &\ge d(\lambda T_0-S_0)-q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y) \\ &\ge d(\lambda T_0-S_0)-q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))-q(y) \\ &= d(\lambda T_0-S_0)-q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot)) &= d(\lambda T_0-S_0+\lambda T-\lambda T_0-2t\lambda(T-T_0)+S_0-S- \\ &\qquad -2t(S_0-S)-(1-2t)y) \\ &= d(\lambda T-S-2t(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))-(1-2t)y) \\ &\ge d(\lambda T-S)-2tq(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))-(1-2t)q(y) \\ &\ge d(\lambda T-S)-q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)). \end{aligned}$$

In jedem der Fälle (6.3) oder (6.4) ist deshalb für alle t aus $[0,\frac{1}{2}]$ $d(H(t,\cdot))>0$. Dies trifft aber auch für jedes $t\in[\frac{1}{2},1]$ zu, wie unmittelbar aus der Wahl von λ und μ ersichtlich ist. Weiter ergibt sich mit

$$(6.6)\qquad H(t,\cdot)-H(t_0,\cdot) = 2(t_0-t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y) \quad \text{für } t,t_0\in[0,\tfrac{1}{2}]$$

und

$$(6.7)\qquad H(t,\cdot)-H(t_0,\cdot) = 2(t-t_0)\mu T_0 \quad \text{für } t,t_0\in[\tfrac{1}{2},1],$$

daß für alle $t_0\in[0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ \|x\|\to\infty \\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|H(t,x)-H(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0$$

ist, denn $\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y$ und μT_0 sind Elemente aus Q. Insgesamt können wir daher Lemma 3.5(b) anwenden, d.h.

(6.8) $\quad \exists R_1\in\mathbb{R}^+ \forall x\in A, \|x\|\geq R_1 \forall t\in[0,1]: \quad H(t,x)\neq 0.$

Nunmehr verifizieren wir für $G:[0,1]\times X\to X^*$ erklärt durch

$$G(t,\cdot) := H(1,\cdot)-tH(1,-\cdot) \quad (t\in[0,1])$$

die Erfordernisse von Lemma 3.5(b).

Da T_0 ungerade ist, bekommen wir für $G(t,\cdot)$ die Darstellung

(6.9) $\quad G(t,\cdot) = (1+t)(\lambda+\mu)T_0-S_0+tS_0(-\cdot) \quad (t\in[0,1]).$

Ferner ist A symmetrisch und also mit $f\in Q$ auch $f(-\cdot)$ aus Q und $q(f)=q(f(-\cdot))$. Danach ist für jedes $t\in[0,1]$ $G(t,\cdot)\in Q$, und zusammen mit Lemma 3.2(d) und (6.5) folgt

$$\begin{aligned} d(G(t,\cdot)) &\geq (1+t)|\lambda+\mu|d(T_0)-q(S_0)-tq(S_0) \\ &= (1+t)(|\lambda+\mu|d(T_0)-q(S_0)) > 0. \end{aligned}$$

Schließlich wird wegen

$$G(t,\cdot)-G(t_0,\cdot) = (t-t_0)((\lambda+\mu)T_0+S_0(-\cdot)) \qquad \text{für } t,t_0\in[0,1]$$

und $(\lambda+\mu)T_0+S_0(-\cdot)\in Q$ auch für alle $t_0\in[0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ \|x\|\to\infty \\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|G(t,x)-G(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Insgesamt liefert somit das Lemma 3.5(b):

(6.10) $\quad \exists R_2\in\mathbb{R}^+ \forall x\in A, \|x\|\geq R_2 \forall t\in[0,1]: \quad G(t,x)\neq 0.$

Vermöge (6.1), d.h.

$$\inf_{x\in\partial\Omega_k} \|x\| = m_k \to\infty \text{ für } k\to\infty,$$

gibt es nun ein $k_0\in\mathbb{N}$, für das

$$m_{k_0} \geq \max\{R_1,R_2\}$$

gilt. Definieren wir demnach $\Omega:=\Omega_{k_0}$, so ist nach Voraussset-

zung Ω offen, beschränkt, symmetrisch, $0\in\Omega$ und $\partial\Omega\subset A$. Folglich erhalten wir aus (6.8) und (6.10):

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega:\quad H(t,x)\neq 0\neq G(t,x).$$

Setzen wir also $\Delta:=X$, dann bedeutet dies, daß für die Abbildung $H:[0,1]\times X\to X^*$ die Voraussetzungen (v) und (vii) von Satz 5.2 bereits erfüllt sind. Im folgenden überprüfen wir die übrigen Bedingungen dieses Satzes.

Aus der Definition von H und den Stetigkeitseigenschaften der Abbildungen $S,S_0,T,T_0,y:X\to X^*$ ergibt sich unmittelbar die Halbstetigkeit von $H:[0,1]\times X\to X^*$, d.h. die Voraussetzung (i). Oberdies sind $S,S_0,T,T_0,y:X\to X^*$ beschränkt, so daß $H:[0,1]\times X\to X^*$ auch der Bedingung (iii) von Satz 5.2 genügt und

$$(6.11)\qquad 0<M_1:=\sup_{x\in\partial\Omega}\|\lambda(T-T_0)(x)+(S_0-S)(x)-y\|+1<\infty$$

sowie

$$(6.12)\qquad 0<M_2:=\sup_{x\in\partial\Omega}\|T_0x\|+1<\infty$$

ist. Weiter sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Definieren wir nun $\delta_1:=\varepsilon/2M_1$ bzw. $\delta_2:=\varepsilon/2|\mu|M_2$, so schließen wir aus (6.6) und (6.11) bzw. (6.7) und (6.12) auf

$$\forall s,t\in[0,\tfrac{1}{2}],|s-t|<\delta_1\forall x\in\partial\Omega:\quad\|H(s,x)-H(t,x)\|<\varepsilon$$

bzw.

$$\forall s,t\in[\tfrac{1}{2},1],|s-t|<\delta_2\forall x\in\partial\Omega:\quad\|H(s,x)-H(t,x)\|<\varepsilon.$$

Damit ist auch die Voraussetzung (ii) verifiziert. Darüber hinaus folgt für $t\in[0,\frac{1}{2}]$ noch

$$\begin{aligned}H(t,\cdot)&=\lambda T_0-S_0+(1-2t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y)\\&=\lambda T_0+\lambda T-\lambda T_0-2t\lambda T+2t\lambda T_0-S_0+S_0-S-2tS_0+\\&\qquad\qquad+2tS-(1-2t)y\\&=\lambda(T+2t(T_0-T))-S-2t(S_0-S)-(1-2t)y.\end{aligned}$$

Dabei erfüllt die Abbildung $\lambda(T+2t(T_0-T)):X\to X^*$ nach Voraussetzung die Bedingung (S) ($\lambda\neq 0$!), während $-S-2t(S_0-S)-(1-2t)y:X\to X^*$ vollstetig ist. Dann genügt aber auch $H(t,\cdot):X\to X^*$ ($t\in[0,\frac{1}{2}]$) der Bedingung (S) (vgl. Lemma[1.2], [77], S.19). Mit demselben Argument erhalten wir schließlich, daß ebenfalls die Abbildungen

$H(t,\cdot):X\to X^*$ $(t\in[\frac{1}{2},1])$ bzw. $G(t,\cdot):X\to X^*$ $(t\in[0,1])$ gegeben durch

$$H(t,\cdot) = (\lambda+(2t-1)\mu)T_0-S_0$$

bzw. (nach (6.9))

$$G(t,\cdot) = (1+t)(\lambda+\mu)T_0-S_0+tS_0(-\cdot)$$

die Bedingung (S) erfüllen, womit wir die restlichen Voraussetzungen (iv) und (vi) nachgewiesen hätten.

Die Anwendung dieses Satzes ergibt:

$$\exists x\in\Omega:\quad 0 = H(0,x) = \lambda Tx-Sx-y.$$

Da $y\in X^*$ beliebig war, haben wir demnach die Surjektivität von $\lambda T-S:X\to X^*$ bewiesen. Ferner folgt für $y=0$ $d(\lambda T-S)=d(H(0,\cdot))>0$, so daß die Abbildung $\lambda T-S:X\to X^*$ nach Lemma 3.5(a) sogar gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A ist.

Ad.(b): Die Definition des φ-asymptotischen Spektrums zusammen mit $d(S_0)>0$ impliziert $0\notin\Sigma(T_0,S_0)$. Außerdem ist nach Lemma 4.4(a) $\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0)$ offen, d.h.

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|<\varepsilon:\quad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0).$$

Es seien also jetzt $\lambda\neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0)$ mit (6.3) oder (6.4) und $y\in X^*$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es ein $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $0<|\mu|<|\lambda|$, $\operatorname{sign}(\mu)=-\operatorname{sign}(\lambda)$ und

$$|\lambda+\mu|\cdot q(T_0) < d(S_0). \tag{6.13}$$

Damit definieren wir wie im Teil (a) $H:[0,1]\times X\to X^*$ durch

$$H(t,\cdot) := \begin{cases} \lambda T_0-S_0+(1-2t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)-y) & \text{für } 0\leq t\leq\frac{1}{2}, \\ (\lambda+(2t-1)\mu)T_0-S_0 & \text{für } \frac{1}{2}<t\leq 1 \end{cases}$$

sowie $G:[0,1]\times X\to X^*$ durch

$$G(t,\cdot) := H(1,\cdot)-tH(1,-\cdot)\ (t\in[0,1]).$$

Da S_0 ungerade ist, ergeben sich die Darstellungen

$$G(t,\cdot) = (\lambda+\mu)(T_0-tT_0(-\cdot))-(1+t)S_0\ (t\in[0,1]) \tag{6.14}$$

und

$$G(t,\cdot)-G(t_0,\cdot) = (t_0-t)((\lambda+\mu)T_0(-\cdot)+S_0)\ (t,t_0\in[0,1]).$$

Weiter erhalten wir aus (6.14) zusammen mit Lemma 3.2(d) und

(6.13) für alle $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned} d(G(t,\cdot)) &\geq (1+t)d(S_0)-|\lambda+\mu|q(T_0-tT_0(-\cdot)) \\ &\geq (1+t)d(S_0)-|\lambda+\mu|(q(T_0)+tq(T_0(-\cdot))) \\ &= (1+t)(d(S_0)-|\lambda+\mu|q(T_0)) > 0. \end{aligned}$$

Insgesamt können wir somit in völliger Analogie zur Beweisführung im Fall (a) auf die Behauptung schließen.

q.e.d.

Beachtenswerterweise setzen wir in Satz 6.1 - im Unterschied zu allen vergleichbaren bekannten Ergebnissen (Literaturhinweise siehe Einleitung) - keinen der Operatoren S, S_0, T und T_0 als homogen und lediglich eine der Abbildungen S_0 und T_0 als ungerade voraus. Dabei geben die Bedingungen (6.3) und (6.4) offenbar an, inwieweit die Operatoren S_0 und T_0 gestört werden dürfen, damit aus den geforderten Eigenschaften an λ hinsichtlich des Spektrums $\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)$ noch die Surjektivität der gestörten Abbildung $\lambda T-S:X\to X^*$ folgt. Vor allem sind S und S_0 bzw. T und T_0 keineswegs notwendigerweise φ-asymptotisch äquivalent bez. A. Ferner lassen sich die Einschränkungen an λ nicht abschwächen, dies zeigt die

Bemerkung 6.2.

(a) In Satz 6.1(a) kann die Bedingung "λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)\cup\{0\})$" *nicht* ersetzt werden durch "$\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)\cup\{0\})$".

(b) In Satz 6.1(b) kann die Bedingung "$\lambda\neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R}\setminus\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)$" *nicht* ersetzt werden durch "$\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)\cup\{0\})$".

Beweis:

Hierzu geben wir zwei einfache Beispiele an.

Ad.(a): Man setze $X:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=S_0x:=|x|$ sowie $Tx:=T_0x:=x$ für $x\in\mathbb{R}$. Offenbar sind dann S, S_0, T und T_0 aus $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $d(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(T_0)=1>0$. Ferner ergibt sich wegen

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\lambda\in\mathbb{R}:\quad \lambda T_0x-S_0x=\lambda x-|x|$$

noch $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0,S_0)=\{-1,+1\}$. Weiter sieht man leicht ein, daß die-

ses Beispiel ebenso den restlichen Voraussetzungen von Satz 6.1(a) genügt. Auf der anderen Seite folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [-1,+1]$:

$$\lambda Tx - Sx = \lambda x - |x| \leq |\lambda||x| - |x| \leq |x| - |x| = 0.$$

Demnach ist die Abbildung $\lambda T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für kein $\lambda \in [-1,+1]$ surjektiv.

Ad.(b): Hier definieren wir $X := A := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := x$ sowie $Tx := T_0 x := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Wiederum sind dann S, S_0, T und T_0 Elemente von $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, $d(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(S_0) = 1 > 0$, und mittels

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda T_0 x - S_0 x = \lambda |x| - x$$

bekommen wir $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0,S_0) = \{-1,+1\}$. Oberdies sind offensichtlich auch die übrigen Bedingungen von Satz 6.1(b) erfüllt. Dagegen erhalten wir

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1: \quad \lambda Tx - Sx = \lambda |x| - x \geq |x| - x \geq 0$$

und

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq -1: \quad \lambda Tx - Sx = \lambda |x| - x \leq -|x| - x \leq 0.$$

Also ist für kein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-1,+1)$ die Abbildung $\lambda T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv.

q.e.d.

Schließlich sei noch festgestellt, daß die nach Satz 6.1 surjektiven Operatoren $\lambda T - S: X \to X^*$ nicht zwangsläufig *schwach koerzitiv* sind, d.h. es ist nicht unbedingt der

$$\overset{X\text{-}\lim}{\|x\| \to \infty} \|\lambda Tx - Sx\| = \infty .$$

Dies liegt eben daran, daß wir hier die Räume $Q(\varphi,A,X^*)$ und nicht die Räume $Q(\varphi,X,X^*)$ betrachten. Hierzu geben wir im Fall (a) ein kleines Beispiel (vgl. S.32):

Wir setzen $X := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := e^{x^2} \sin x$ sowie $Tx := T_0 x := x$ für $x \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus erklären wir Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ und A durch

$$\Omega_k := (-k\pi, +k\pi) \quad (k \in \mathbb{N})$$

und

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}: |x| = k\pi\}.$$

Offenbar sind dann $S, S_0, T, T_0 \in Q(1, A, \mathbb{R})$ mit $d(1, A, \mathbb{R})(T_0) = 1 > 0$ und $\Sigma_1^A(T_0, S_0) = \{0\}$. Da auch die übrigen Voraussetzungen von Satz 6.1(a) erfüllt sind, erhalten wir insbesondere

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lambda T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist surjektiv.}$$

Andererseits ist klar, daß für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ der

$$\mathbb{R}\text{-}\lim_{|x| \to \infty} |\lambda x - e^{x^2} \sin x| = \infty$$

ist.

Satz 6.3. (Satz vom FREDHOLM Typ)

Es seien $S, S_0, T, T_0: X \to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt und $S, S_0, T, T_0 \in Q(\varphi, A, X^*)$.

(a) Erfüllt noch für jedes $t \in [0,1]$ die Abbildung $T - tT(-\cdot): X \to X^*$ die Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_\varphi^A(T_0, S_0) \cup \{0\})$ mit

$$q(\varphi, A, X^*)(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) < d(\varphi, A, X^*)(\lambda T_0 - S_0) \tag{6.15}$$

ist die Abbildung $\lambda T - S: X \to X^*$ gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

(b) Ist noch S_0 vollstetig, T_0 halbstetig und beschränkt und erfüllt für jedes $t \in [0,1]$ die Abbildung $T - t(T - T_0): X \to X^*$ die Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_\varphi^A(T_0, S_0) \cup \{0\})$ mit

$$q(\varphi, A, X^*)(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) < d(\varphi, A, X^*)(\lambda T - S) \tag{6.16}$$

ist die Abbildung $\lambda T - S: X \to X^*$ gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 5.1. Dementsprechend werden wir uns hier auf das Wesentliche beschränken.

Ad.(a): Es seien $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit (6.15) und $y \in X^*$ beliebig, aber fest gewählt. Offenbar ist dann auch $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma(T_0, S_0) \cup \{0\})$, und wir definieren $H: [0,1] \times X \to X^*$ durch

$$H(t,\cdot) := \lambda T - S - y \quad (t \in [0,1]).$$

Hierfür wird nach (6.15) für jedes $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot)) &= d(\lambda T_0 - S_0 + \lambda(T-T_0) + (S_0-S) - y) \\ &\geq d(\lambda T_0 - S_0) - q(\lambda(T-T_0) + (S_0-S)) - q(y) \\ &= d(\lambda T_0 - S_0) - q(\lambda(T-T_0) + (S_0-S)) > 0, \end{aligned}$$

und es ergibt sich zusammen mit Lemma 3.5(b):

$$(6.17) \qquad \exists R_1 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \geq R_1 \forall t \in [0,1]: \quad H(t,x) \neq 0.$$

Weiter betrachten wir $G:[0,1]\times X \to X^*$ erklärt durch

$$G(t,\cdot) := H(1,\cdot) - tH(1,-\cdot) \quad (t \in [0,1]).$$

Da S_0 und T_0 als ungerade vorausgesetzt sind, folgt für jedes $t \in [0,1]$ die Darstellung

$$\begin{aligned} G(t,\cdot) &= \lambda T - S - y - t[\lambda T(-\cdot) - S(-\cdot) - y] \\ &= \lambda T_0 - S_0 + \lambda(T-T_0) + (S_0-S) - y - t[\lambda T_0(-\cdot) - S_0(-\cdot) + \\ &\qquad + \lambda(T-T_0)(-\cdot) + (S_0-S)(-\cdot) - y] \\ &= (1+t)(\lambda T_0 - S_0) + \lambda(T-T_0) + (S_0-S) - t[\lambda(T-T_0)(-\cdot) + \\ &\qquad + (S_0-S)(-\cdot)] - (1-t)y \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} d(G(t,\cdot)) &\geq (1+t)d(\lambda T_0 - S_0) - q(\lambda(T-T_0) + (S_0-S)) - \\ &\qquad - tq(\lambda(T-T_0)(-\cdot) + (S_0-S)(-\cdot)) - (1-t)q(y) \\ &= (1+t)(d(\lambda T_0 - S_0) - q(\lambda(T-T_0) + (S_0-S))) > 0 \end{aligned}$$

nach (6.15). Schließlich ist wegen

$$G(t,\cdot) - G(t_0,\cdot) = (t_0 - t)(\lambda T(-\cdot) - S(-\cdot) - y) \quad (t, t_0 \in [0,1])$$

und $\lambda T(-\cdot) - S(-\cdot) - y \in Q$ noch für jedes $t_0 \in [0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ \|x\| \to \infty \\ t \in [0,1], x \in A}} \frac{\|G(t,x) - G(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Insgesamt können wir somit auf die Abbildung $G:[0,1]\times X \to X^*$ Lemma 3.5(b) anwenden und erhalten:

$$(6.18) \qquad \exists R_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \geq R_2 \forall t \in [0,1]: \quad G(t,x) \neq 0.$$

Wie üblich existiert damit nach (6.1), (6.17) und (6.18) ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $\Omega := \Omega_{k_0}$ gilt:

$$\forall t \in [0,1] \forall x \in \partial\Omega: \quad H(t,x) \neq 0 \neq G(t,x).$$

Mit $\Delta := X$ erfüllt daher $H:[0,1]\times X \to X^*$ die Bedingungen (v) und

(vii) von Satz 5.2. Ebenso trifft dies auf die Punkte (i) bis (iv) zu, wie man bei den hier gemachten Voraussetzungen und unter Berücksichtigung von Lemma[1.2] in [77], S.19, unmittelbar einsieht. Mit demselben Argument ergibt sich aus $\lambda \neq 0$ und

$$\begin{aligned} G(t,\cdot) &= \lambda T - S - y - t[\lambda T(-\cdot) - S(-\cdot) - y] \\ &= \lambda(T - tT(-\cdot)) - S + tS(-\cdot) - (1-t)y, \end{aligned}$$

daß auch die Abbildung $G(t,\cdot): X \to X^*$ für jedes $t \in [0,1]$ der Bedingung (S) genügt. Da ferner $y \in X^*$ beliebig war, können wir mit Satz 5.2 auf die Surjektivität des Operators $\lambda T - S: X \to X^*$ schließen. In der Tat ist dieser sogar gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A, wie für $y=0$ aus $d(\lambda T - S) = d(H(0,\cdot)) > 0$ zusammen mit Lemma 3.5(a) folgt.

Ad.(b): Es seien $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit (6.16) und $y \in X^*$ beliebig, aber fest gewählt. Offenbar ist dann wegen

$$d(\lambda T_0 - S_0) \geq d(\lambda T - S) - q(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) > 0$$

auch $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma(T_0, S_0) \cup \{0\})$, und wir definieren $H: [0,1] \times X \to X^*$ durch

$$H(t,\cdot) := \lambda T - S - t(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) - (1-t)y \quad (t \in [0,1]).$$

Hierfür ist nach (6.16) für jedes $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} d(H(t,\cdot)) &\geq d(\lambda T - S) - tq(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) - (1-t)q(y) \\ &\geq d(\lambda T - S) - q(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S)) > 0. \end{aligned}$$

Außerdem bekommt man aus

$$H(t,\cdot) - H(t_0,\cdot) = (t_0 - t)(\lambda(T - T_0) + (S_0 - S) - y) \qquad \text{für } t, t_0 \in [0,1] \tag{6.19}$$

und $\lambda(T - T_0) + (S_0 - S) - y \in Q$ noch, daß für alle $t_0 \in [0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ \|x\| \to \infty \\ t \in [0,1], x \in A}} \frac{\|H(t,x) - H(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0$$

ist. Demnach erhalten wir mit Lemma 3.5(b):

$$\exists R_1 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \geq R_1 \forall t \in [0,1]: \quad H(t,x) \neq 0. \tag{6.20}$$

Weiter betrachten wir $G: [0,1] \times X \to X^*$ erklärt durch

$$G(t,\cdot) := H(1,\cdot) - tH(1,-\cdot) \quad (t \in [0,1]).$$

Nun ist aber $H(1,\cdot) = \lambda T_0 - S_0$, und S_0 sowie T_0 sind nach Voraussetzung ungerade, so daß für $G(t,\cdot)$ die Darstellung

(6.21) $\quad G(t,\cdot) = (1+t)(\lambda T_0 - S_0) \quad (t\in[0,1])$

folgt. Zusammen mit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)\cup\{0\})$ wird damit

$$d(G(t,\cdot)) > 0$$

für alle $t\in[0,1]$. Oberdies ist für jedes $t_0\in[0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ \|x\|\to\infty \\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|G(t,x)-G(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0,$$

wie man wegen (6.21) unmittelbar einsieht. Insgesamt können wir daher auf $G:[0,1]\times X\to X^*$ das Lemma 3.5(b) anwenden, und es ergibt sich:

(6.22) $\quad \exists R_2\in\mathbb{R}^+ \forall x\in A, \|x\|\geq R_2 \forall t\in[0,1]: \quad G(t,x)\neq 0.$

Wie gewohnt begründen wir dann nach (6.1), (6.20) und (6.22) die Existenz eines $k_0\in\mathbb{N}$, so daß für $\Omega:=\Omega_{k_0}$ gilt:

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega: \quad H(t,x)\neq 0\neq G(t,x).$$

Mit $\Delta:=X$ erfüllt also $H:[0,1]\times X\to X^*$ die Bedingungen (v) und (vii) von Satz 5.2. Gleichfalls trifft dies auf die Punkte (i) und (iii) zu, wie man unter den hier gemachten Voraussetzungen leicht überprüft. Weiterhin ist

(6.23) $\quad 0 < M := \sup_{x\in\partial\Omega} \|\lambda(T-T_0)(x)+(S_0-S)(x)-y\|+1 < \infty,$

denn alle Operatoren $S,S_0,T,T_0,y:X\to X^*$ sind beschränkt. Ist nun $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, so setzen wir $\delta:=\varepsilon/M$ und bekommen nach (6.19) und (6.23):

$$\forall s,t\in[0,1], |s-t|<\delta \forall x\in\partial\Omega: \quad \|H(s,x)-H(t,x)\| < \varepsilon,$$

d.h. H genügt auch der Bedingung (ii) von Satz 5.2. Schließlich ergibt sich für jedes $t\in[0,1]$ mit Lemma[1.2] in [77], S.19, aus

$$\begin{aligned} H(t,\cdot) &= \lambda T - S - \lambda t(T-T_0) - t(S_0-S) - (1-t)y \\ &= \lambda(T-t(T-T_0)) - S - t(S_0-S) - (1-t)y \end{aligned}$$

und (6.21), daß die Abbildungen $H(t,\cdot),G(t,\cdot):X\to X^*$ die Bedingung (S) erfüllen. Insgesamt sind damit sämtliche Voraussetzungen von Satz 5.2 verifiziert, woraus die Surjektivität des Operators $\lambda T-S:X\to X^*$ folgt. Dann ist dieser aber sogar gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A, wie (6.16) und

Lemma 3.5(a) zeigen.

q.e.d.

Wie man dem Beweis von Satz 6.3 entnimmt, ist jedes $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, welches eine der Bedingungen (6.15) oder (6.16) erfüllt, bereits Element von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_o,S_o)\cup\{0\})$. Dennoch haben wir unser letztes Ergebnis ganz bewußt wie angegeben formuliert. Es wird dadurch deutlich, daß die Abschwächung der Einschränkungen an den Parameter λ, wie sie nach der Bemerkung 6.2 für Satz 6.1 nicht möglich ist, gelingt, wenn wir nicht nur jeweils einen der Operatoren S_o und T_o als ungerade voraussetzen, sondern beide.

Als unmittelbare Folgerungen aus Satz 6.3 erhalten wir zwei weitere Resultate. Bei einem davon wird es sich um die angestrebte nichtlineare FREDHOLMsche Alternative handeln. Zuvor erinnern wir noch einmal daran, daß für eine gegebene Abbildung $f:X\to X^*$ der Operator $f^-:X\to X^*$ definiert ist durch

$$\forall x\in X:\quad f^-(x) := -f(-x).$$

Korollar 6.4. (Satz vom FREDHOLM Typ)

Es seien $S,T:X\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $S,T\in Q(\varphi,A,X^*)$, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T-\frac{t}{2}(T-T^-):X\to X^*$ die Bedingung (S). Dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$(6.24)\qquad \tfrac{1}{2}q(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T^-)+(S^--S)) < d(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S)$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:X\to X^*$ gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

Beweis:

Der Beweis erfolgt mit Satz 6.3(b). Seien hierzu $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit (6.24) beliebig, aber fest gewählt und die Abbildungen S_o und T_o von X in X^* definiert durch

$$S_o := \tfrac{1}{2}(S+S^-) \text{ und } T_o := \tfrac{1}{2}(T+T^-).$$

Zunächst wird dann aus

$$\forall x\in X:\ S_0(-x) = \tfrac{1}{2}(S(-x)+S^-(-x)) = \tfrac{1}{2}(S(-x)-S(x))$$
$$= -\tfrac{1}{2}(S(x)-S(-x)) = -S_0(x)$$

ersichtlich, daß die Operatoren S_0 und T_0 ungerade sind. Ferner ist mit S offenbar auch S_0 vollstetig und mit T auch T_0 halbstetig und beschränkt. Da überdies generell die Symmetrie von A verlangt wird, ergibt sich aus $S,T\in Q$ noch $S_0,T_0\in Q$. Weiterhin erfüllt für jedes $t\in[0,1]$ die Abbildung $T-t(T-T_0):X\to X^*$ nach Voraussetzung die Bedingung (S), denn es gilt

$$T-t(T-T_0) = T-t(T-\tfrac{1}{2}(T+T^-)) = T-\tfrac{t}{2}(T-T^-).$$

Schließlich ist nach (6.24)

$$q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) = q(\lambda(T-\tfrac{1}{2}T-\tfrac{1}{2}T^-)+(\tfrac{1}{2}S+\tfrac{1}{2}S^--S))$$
$$= \tfrac{1}{2}q(\lambda(T-T^-)+(S^--S)) < d(\lambda T-S).$$

Die Behauptung erhalten wir demnach mit Satz 6.3(b), weil für ein $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit (6.16) bereits $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)\cup\{0\})$ folgt.

q.e.d.

Korollar 6.5. (FREDHOLMsche Alternative)

Es seien $S,S_0,T,T_0:X\to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $S,S_0,T,T_0\in Q(\varphi,A,X^*)$, $S\sim S_0$, $T\sim T_0$, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T-tT(-\cdot):X\to X^*$ die Bedingung (S). Dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind die vier Aussagen

(a) $\lambda\notin\Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)$,

(b) $\lambda\notin\Sigma^A_\varphi(T,S)$,

(c) $\lambda T-S:X\to X^*$ ist gleichmäßig φ-asymptotisch regulär bez. A und

(d) $\lambda T-S:X\to X^*$ ist gleichmäßig φ-asymptotisch regulär surjektiv bez. A

äquivalent.

Beweis:

Es sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig, aber fest gewählt. Der Beweis erfolgt nun in vier Schritten.

(i) Wir zeigen: (a) $\Rightarrow$ (d). Nach Voraussetzung ist also λ aus $\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)\cup\{0\})$ und damit insbesondere $d(\lambda T_0-S_0)>0$. Zusammen

mit $S \sim S_0$ und $T \sim T_0$ ergibt sich daher auch

$$q(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) \leq |\lambda| q(T-T_0)+q(S_0-S) = 0 < d(\lambda T_0 - S_0).$$

Demnach liefert Satz 6.3(a) das Gewünschte.

(ii) Wir zeigen: (d) $\Rightarrow$ (c). Dies ist trivialerweise erfüllt.

(iii) Wir zeigen: (c) $\Leftrightarrow$ (b). Diese Behauptung erhalten wir unmittelbar mit Lemma 3.5(a).

(iv) Wir zeigen: (b) $\Leftrightarrow$ (a). Diese Aussage bekommen wir direkt aus Lemma 4.7(a).

q.e.d.

Erwähnenswert ist wiederum, daß wir mit Korollar 6.5 eine FREDHOLMsche Alternative erhalten haben, bei der wir nach wie vor auf jegliche Homogenitätseigenschaften der Operatoren S, S_0, T und T_0 verzichten können. Dies ist bei keinem uns bekannten vergleichbaren Ergebnis der Fall. Ferner bekommen wir offenbar eine Variante von Korollar 6.4 bzw. Korollar 6.5, wenn wir an entsprechender Stelle der zugehörigen Beweise statt des Teiles (b) bzw. (a) von Satz 6.3 den Teil (a) bzw. (b) heranziehen.

Weitergehende Aussagen lassen sich allerdings unter den Erfordernissen von Korollar 6.5 nicht machen, dies zeigt die

Bemerkung 6.6.

Unter den Voraussetzungen von Korollar 6.5 sind die beiden folgenden Aussagen *falsch*:

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $[\lambda T-S: X \to X^*$ ist surjektiv$] \Rightarrow \lambda \notin \Sigma_\varphi^A(T_0, S_0)$.

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_\varphi^A(T_0, S_0) \cup \{0\}) \exists R \in \mathbb{R}^+$:

$$\lambda T-S\big|_{\{x \in A \mid \|x\| \geq R\}} \text{ ist injektiv.}$$

Beweis:

Wir belegen die Behauptungen durch Angabe zweier Beispiele.

Ad.(a): Es sei $X:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $S_0 x:=Tx:=T_0 x:=x$ sowie $Sx:=x-\sqrt{|x|}\cdot \operatorname{sign}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Offenbar sind dann S, S_0, T und T_0 Elemente aus $Q(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $S \sim S_0$ und $T \sim T_0$. Ferner ist leicht einzusehen, daß unser Beispiel auch den übrigen Anforderungen von Korollar 6.5 genügt. Nun ist aber einerseits wegen

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda T_0 x - S_0 x = (\lambda - 1)x$$

$\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0, S_0) = \{1\}$, während andererseits aus

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1 \cdot Tx - Sx = \sqrt{|x|} \cdot \operatorname{sign}(x)$$

die Surjektivität der Abbildung $1 \cdot T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgt. Zwangsläufig ist diese daher nicht gleichmäßig 1-asymptotisch regulär bez. $\mathbb{R}$, wie man sich auch sofort überlegt.

Ad.(b): Hier definieren wir $X := A := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := 0$ sowie $Tx := T_0 x := x + 2\pi \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$. Wiederum sind jetzt S, S_0, T und T_0 Elemente aus $Q(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $S \sim S_0$ und $T \sim T_0$. Weiterhin ist klar, daß für diesen konkreten Fall überdies die restlichen Bedingungen von Korollar 6.5 erfüllt sind. Außerdem folgt aus

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda T_0 x - S_0 x = \lambda(x + 2\pi \sin x)$$

noch $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0, S_0) = \{0\}$. Erklären wir dagegen für jedes $n \in \mathbb{N}$ x_n, y_n und z_n aus $\mathbb{R}$ durch

$$x_n := 2n\pi, \quad y_n := (2n + \tfrac{1}{2})\pi \text{ und } z_n := (2n + \tfrac{3}{2})\pi,$$

so ergibt sich für $\lambda := 1 \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0, S_0) \cup \{0\})$:

$$\lambda Tx_n - Sx_n = 2n\pi, \quad \lambda Ty_n - Sy_n = 2n\pi + \tfrac{5}{2}\pi \text{ und } \lambda Tz_n - Sz_n = 2n\pi - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Demnach existiert aber nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_n \in \mathbb{R}$ mit

$$x_n < y_n < \xi_n < z_n \quad \text{und} \quad \lambda Tx_n - Sx_n = \lambda T\xi_n - S\xi_n.$$

q.e.d.

Abschließend betrachten wir noch den Fall zweier a-homogener Operatoren S_0 und T_0 ($a \in \mathbb{R}^+$). Unter dieser Voraussetzung läßt sich dann eine FREDHOLMsche Alternative im Sinne der üblichen Definition eines Eigenwertes herleiten. Genauer gilt das

Korollar 6.7. (FREDHOLMsche Alternative)

Es seien $S, S_0, T, T_0: X \to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $a \in \mathbb{R}^+$, $S, S_0, T, T_0 \in Q(a, A, X^*)$, $S \sim S_0$, $T \sim T_0$, und für jedes $t \in [0,1]$ genüge die Abbildung $T - tT(-\cdot): X \to X^*$ der Bedingung (S).
Erfüllt schließlich auch T_0 die Bedingung (S) und sind S_0 und T_0 a-homogen, S_0 vollstetig und T_0 halbstetig, dann folgt:

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind die vier Aussagen

(a) $\lambda \notin \sigma^A(T_0, S_0)$,

(b) $\lambda \notin \Sigma_a^A(T, S)$,

(c) $\lambda T - S : X \to X^*$ ist gleichmäßig a-asymptotisch regulär bez. A und

(d) $\lambda T - S : X \to X^*$ ist gleichmäßig a-asymptotisch regulär surjektiv bez. A

äquivalent.

Beweis:

Nach Korollar 6.5 genügt es zu zeigen:

$$\Sigma_a^A(T_0, S_0) \setminus \{0\} = \sigma^A(T_0, S_0) \setminus \{0\}.$$

Sei also zunächst $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0, S_0) \setminus \{0\}$ und demnach

$$d(a, A, X^*)(\lambda T_0 - S_0) = 0.$$

Dann gibt es eine Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\|\lambda T_0 x_n - S_0 x_n\|}{\|x_n\|^a} = 0.$$

Setzen wir daher $v_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die $\|v_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und wegen der a-Homogenität der Operatoren S_0 und T_0 der

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda T_0 v_n - S_0 v_n\| = 0.$$

Ferner erfüllt die Abbildung $\lambda T_0 - S_0 : X \to X^*$ $(\lambda \neq 0!)$ unter den gemachten Voraussetzungen vermöge Lemma[1.2], [77], S.19, die Bedingung (S). Insgesamt erhalten wir somit analog zum Beweis von Lemma 4.8(c) die Existenz eines $v_0 \in X$, $\|v_0\| = 1$, mit

$$\lambda T_0 v_0 - S_0 v_0 = 0.$$

Hierzu wiederum gibt es (vgl. S.73) ein $t_1 \in \mathbb{R}^+$, für das gilt:

$$0 \neq t_1 v_0 \in \partial\Omega_1 \subset A \text{ und } (\lambda T_0 - S_0)(t_1 v_0) = t_1^a (\lambda T_0 v_0 - S_0 v_0) = 0.$$

Dies bedeutet aber $\lambda \in \sigma^A(T_0, S_0) \setminus \{0\}$.

Umgekehrt sei nun $\lambda \in \sigma^A(T_0, S_0) \setminus \{0\}$, d.h.

(6.25) $\quad \exists x_0 \in A \setminus \{0\}: \quad \lambda T_0 x_0 - S_0 x_0 = 0.$

Wegen der Gestalt der Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ existiert (vgl. S.73) weiter

eine Folge (t_k) in $\mathbb{R}^+$ mit

(6.26) $\quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad t_k x_0 \in \partial\Omega_k \subset A.$

Oberdies bekommen wir aus

$$\|t_k x_0\| \geq \inf_{x \in \partial\Omega_k} \|x\| = m_k \to \infty \quad \text{für } k \to \infty$$

noch, daß der

(6.27) $\quad \lim_{k \to \infty} \|t_k x_0\| = \infty$

ist. Folglich ergibt sich aus (6.26), (6.27), der a-Homogenität der Operatoren S_0 und T_0 sowie (6.25):

$$0 \leq d(a,A,X^*)(\lambda T_0 - S_0) \leq \liminf_{k \to \infty} \frac{\|(\lambda T_0 - S_0)(t_k x_0)\|}{\|t_k x_0\|^a}$$

$$= \liminf_{k \to \infty} \frac{t_k^a \|\lambda T_0 x_0 - S_0 x_0\|}{t_k^a \|x_0\|^a} = 0.$$

Also ist $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0,S_0) \setminus \{0\}$.

q.e.d.

Sieht man einmal von der hier geforderten Separabilität des Raumes X ab, so stimmt Korollar 6.7 im Fall A=X mit Satz [1.5], [77], S.22, überein. Letzterer wiederum stellt eine Verallgemeinerung der Sätze [2.2] und [2.4] in [13], S.72 und S.73, dar.

§ 7. ASYMPTOTISCHE VERZWEIGUNGSPUNKTE

Im folgenden beschäftigen wir uns hauptsächlich mit der Frage nach der Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren S und T aus einem geeigneten Raum Q. Hierzu legen wir zunächst noch einmal genau fest,

welche ausgezeichneten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ als asymptotische Verzweigungspunkte zu definieren sind. Daran anschließend werden einige charakteristische Merkmale derselben aufgeführt. Im zweiten Teil dieses Paragraphen schließlich schränken wir uns auf den Dualraum als Bildraum ein und beweisen hierfür unser Hauptergebnis (Satz 7.9), das unter passenden Voraussetzungen die Existenz (mindestens) eines positiven und (mindestens) eines negativen asymptotischen Verzweigungspunktes des Paares (T,S) sicherstellt.

§ 7.1. DEFINITION UND CHARAKTERISIERUNG

Im ganzen Abschnitt seien X und Y reelle normierte Räume, $A \subset X$ unbeschränkt, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t \geq \gamma$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter stets die Funktion $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ verstanden werden.

Definition 7.1.

Es seien $S,T: A \to Y$.

(a) Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt genau dann *asymptotischer Verzweigungspunkt (aVP) des Paares (T,S) (bzw. der Gleichung $\lambda Tx - Sx = 0$) bez. A*, wenn gilt:

$$\exists (\lambda_n) \subset \mathbb{R}, \lambda_n \to \lambda \; \exists (x_n) \subset A, \|x_n\| \to \infty \; \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lambda_n T x_n - S x_n = 0.$$

(b) $\Gamma^A(T,S) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist aVP des Paares } (T,S) \text{ bez. } A\}$.

Zunächst geben wir gewisse, zwischen asymptotischen Verzweigungspunkten einerseits und Eigenwerten bzw. φ-asymptotischen Eigenwerten andererseits, bestehende Zusammenhänge an.

Lemma 7.2.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q(\varphi,A,Y)$ mit $S \sim S_0$ und $T \sim T_0$. Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S) \subset \Sigma^A_\varphi(T_0,S_0).$$

(b) Es seien $S,T:A \to Y$. Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S) \subset \overline{\sigma^A(T,S)}.$$

Beweis:

Ad.(a): Es sei $\lambda \in \Gamma^A(T,S)$. Dann gibt es Folgen $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset A$ mit $\lambda_n \to \lambda$, $\|x_n\| \to \infty$ und $\lambda_n T x_n - S x_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(\varphi,A,Y)(\lambda T - S) &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T x_n - S x_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T x_n - S x_n - (\lambda_n T x_n - S x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(|\lambda - \lambda_n| \frac{\|T x_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \right) = 0, \end{aligned}$$

denn $T \in Q(\varphi,A,Y)$. Also folgt $\lambda \in \Sigma^A_\varphi(T,S)$. Nach Lemma 4.7(a) ist aber $\Sigma^A_\varphi(T,S) = \Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)$ und daher die Behauptung bewiesen.

Ad.(b): Ergibt sich direkt aus der Definition von $\Gamma^A(T,S)$.

q.e.d.

Die Umkehrungen der beiden letzten Aussagen sind allerdings nicht allgemeingültig. Dies zeigt das

Lemma 7.3.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q(\varphi,A,Y)$ mit $S \sim S_0$ und $T \sim T_0$. Dann folgt:

$$\lambda \in \Sigma^A_\varphi(T_0,S_0) \;\not\Rightarrow\; \lambda \in \Gamma^A(T,S).$$

(b) Es seien $S,T:A \to Y$. Dann folgt:

$$\lambda \in \sigma^A(T,S) \;\not\Rightarrow\; \lambda \in \Gamma^A(T,S).$$

Beweis:

Ad.(a): Wir setzen $X := Y := A := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}^+_0$ und $Sx := S_0 x := Tx := T_0 x := \sqrt{|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann sind einerseits S und T Elemente von $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\Sigma^{\mathbb{R}}_1(T,S) = \mathbb{R}$ und $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S) = \{1\}$ (vgl.

S.63), während aber andererseits nach Lemma 7.2(b) $\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)$ eine Teilmenge von $\overline{\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)}$ ist.

Ad.(b): Hier definieren wir $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=S_0x:=x$ sowie $Tx:=T_0x:=1$ für $x\in\mathbb{R}$. Wiederum sind S und T Elemente von $Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und es wird $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)=\phi$ sowie $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (vgl. S. 63). Lemma 7.2(a) ergibt jedoch $\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)\subset\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)$.

q.e.d.

Schließlich sind unter geeigneten Voraussetzungen asymptotische Verzweigungspunkte auch Eigenwerte im üblichen Sinne.

Lemma 7.4.

(a) Es sei A abgeschlossen, I_A die Identität auf A, $S,S_0,T\in Q(1,A,X)$, $S\sim S_0$, $T\sim I_A$ und

$$\exists r,R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A,\|x\|\geq R:\quad r\frac{x}{\|x\|}\in A \text{ und } S_0(r\frac{x}{\|x\|})=\frac{r}{\|x\|}S_0x.$$

Ferner sei $S_0:A\to X$ vollstetig. Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S)\setminus\{0\}\subset\sigma^A(I_A,S_0)\setminus\{0\}.$$

(b) Es sei X ein reeller reflexiver BANACH-Raum, $\lambda\in\mathbb{R}$, A schwach abgeschlossen, $S,S_0,T,T_0\in Q(a,A,X^*)$, $S\sim S_0$, $T\sim T_0$ und

$$\exists r,R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A,\|x\|\geq R:$$
$$r\frac{x}{\|x\|}\in A,\ S_0(r\frac{x}{\|x\|})=\frac{r^a}{\|x\|^a}S_0x \text{ und } T_0(r\frac{x}{\|x\|})=\frac{r^a}{\|x\|^a}T_0x.$$

Ferner erfülle die Abbildung $\lambda T_0-S_0:A\to X^*$ die Bedingung (S) und sei halbstetig. Dann folgt:

$$\lambda\in\Gamma^A(T,S) \Rightarrow \lambda\in\sigma^A(T_0,S_0).$$

Beweis:

Ad.(a): Nach Lemma 7.2(a) ist $\Gamma^A(T,S)\subset\Sigma_1^A(T,S)$, und die Behauptung ergibt sich mit Lemma 4.8(b).

Ad.(b): Analog zum Teil (a) wird hier der Beweis mit Lemma 7.2(a) und Lemma 4.8(c) geführt.

q.e.d.

Darüber hinaus formulieren wir abschließend noch zwei topologische Eigenschaften der Menge $\Gamma^A(T,S)$.

Lemma 7.5.

(a) Es seien $S,T:A\to Y$. Dann folgt:

$\Gamma^A(T,S)$ ist abgeschlossen.

(b) Es seien $S,S_0,T,T_0\in Q(\varphi,A,Y)$ mit $S\sim S_0$, $T\sim T_0$ und $d(\varphi,A,Y)(T_0)>0$. Dann folgt:

$\Gamma^A(T,S)$ ist kompakt.

Beweis:

Ad.(a): Für $\Gamma^A(T,S)=\phi$ ist die Aussage trivial. Sei also (λ_k) eine Folge aus $\Gamma^A(T,S)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ und der

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda. \tag{7.1}$$

Dann gibt es zu jedem $k\in\mathbb{N}$ Folgen $(\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ und $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^n=\lambda_k,\quad \lim_{n\to\infty}\|x_k^n\|=\infty$$

und

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad \lambda_k^n Tx_k^n-Sx_k^n=0.$$

Insbesondere haben wir somit erhalten:

$$\forall k\in\mathbb{N}\exists n_k\in\mathbb{N}: \tag{7.2}$$
$$|\lambda_k^{n_k}-\lambda_k|<\tfrac{1}{k},\quad \|x_k^{n_k}\|\geq k\quad\text{und}\quad \lambda_k^{n_k}Tx_k^{n_k}-Sx_k^{n_k}=0.$$

Demnach ergibt sich für jedes $k\in\mathbb{N}$:

$$|\lambda-\lambda_k^{n_k}|\leq|\lambda-\lambda_k|+|\lambda_k-\lambda_k^{n_k}|<|\lambda-\lambda_k|+\tfrac{1}{k}\to 0$$

für $k\to\infty$ nach (7.1). Daher ist wegen (7.2) $\lambda\in\Gamma^A(T,S)$.

Ad.(b): Unter den gemachten Voraussetzungen ist $\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)$ nach Lemma 4.4(b) kompakt. Zusammen mit Teil (a) und Lemma 7.2(a) folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

§ 7.2. EXISTENZ

Das wichtigste Ergebnis dieses siebten Paragraphen ist - wie bereits eingangs erwähnt - ein Satz über die Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren S und T aus einem geeigneten Raum Q. Der recht umfangreiche Beweis dieses Resultates verlangt gewisse Vorbereitungen, die wir zunächst durch die Angabe von drei Hilfssätzen treffen werden. Dabei setzen wir für den Rest dieses Abschnitts folgendes voraus (vgl. die §§ 5 und 6):

Es sei X ein reeller, reflexiver und separabler BANACH-Raum, $\Omega,\Delta\subset X$, Ω offen und beschränkt, Δ schwach abgeschlossen, und es gelte $0\in\Omega\subset\Delta$. Dazu sei (Ω_k) eine Folge von Teilmengen von X mit

$$\forall k\in\mathbb{N}:$$
$$\Omega_k \text{ ist offen, beschränkt, symmetrisch und } 0\in\Omega_k.$$

Ferner fordern wir, daß für

$$m_k := \inf_{x\in\partial\Omega_k} \|x\| \quad (k\in\mathbb{N})$$

der

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \infty \tag{7.3}$$

ist. Weiter sei A eine symmetrische Teilmenge von X mit

$$A \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k$$

und $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ eine Funktion, die der Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty \tag{7.4}$$

genügt. Oberdies bezeichne $D=\{d_j \mid j\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbare und in X dicht liegende Teilmenge von X.

Damit definieren wir Unterräume X_n $(n\in\mathbb{N})$ von X durch

$$X_n := [d_1,\ldots,d_n]$$

und Abbildungen $i_n\colon X_n\to X$ $(n\in\mathbb{N})$ vermöge

$$\forall x\in X_n:\quad i_n(x) := x.$$

Schließlich sei für jedes $n\in\mathbb{N}$ $i_n^*:X^*\to X_n^*$ der zu i_n duale Operator und h_n ein linearer Homöomorphismus von X_n^* auf X_n.

Unser erster Hilfssatz ist nun das

Lemma 7.6.

Es seien $S,T\in Q(\varphi,A,X^*)$, $d(\varphi,A,X^*)(S)>0$ und $1\in\mathbb{R}^+$ mit

$$1\cdot q(\varphi,A,X^*)(T) < d(\varphi,A,X^*)(S).$$

Dann folgt:

$$\forall r\in\mathbb{R}^+\exists R\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq 1\forall x\in A,\|x\|\geq R:\quad \|\lambda Tx-Sx\|\geq r.$$

Beweis:

Wir definieren eine Abbildung $H:[0,1]\times A\to X^*$ durch

$$\forall t\in[0,1]:\quad H(t,\cdot) := (2t-1)1T-S\in Q.$$

Der Wahl von 1 entsprechend ist dann für jedes $t\in[0,1]$

$$d(H(t,\cdot))\geq d(S)-|(2t-1)1|q(T)\geq d(S)-1\cdot q(T)>0.$$

Ferner wird wegen

$$H(t,\cdot)-H(t_0,\cdot) = 2(t-t_0)1T\quad (t,t_0\in[0,1])$$

auch für alle $t_0\in[0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ \|x\|\to\infty\\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|H(t,x)-H(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0,$$

denn $T\in Q$. Insgesamt ergibt sich also mit Lemma 3.5(a):

(7.5) $\quad\exists B,C\in\mathbb{R}^+\forall x\in A,\|x\|\geq B\forall t\in[0,1]:$
$\|(2t-1)1Tx-Sx\| = \|H(t,x)\|\geq C\cdot\varphi(\|x\|).$

Ist jetzt ein $r\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, so existiert wegen (7.4) ein $R\in\mathbb{R}^+$, $R\geq B$, mit

$$\forall t\in[R,\infty):\quad C\cdot\varphi(t)\geq r.$$

Zusammen mit (7.5) bedeutet dies aber

$$\forall x\in A,\|x\|\geq R\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq 1:\quad \|\lambda Tx-Sx\|\geq C\cdot\varphi(\|x\|)\geq r.$$

q.e.d.

Wie der Beweis zeigt, bleibt Lemma 7.6 auch für einen beliebi-

gen Raum $Q(\psi,B,Y)$ mit $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$ gültig.

Lemma 7.7.

Es seien $S,T:\Delta\to X^*$, S vollstetig und T halbstetig und beschränkt. Ferner erfülle T die Bedingung (S) und

(7.6) $\quad \exists l\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},0<|\lambda|\leq l\forall x\in\partial\Omega:\ \lambda Tx-Sx\neq 0.$

Dann folgt für alle $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$ oder $\lambda_1,\lambda_2\in[-1,0)$:

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0:\ \deg(h_n i_n^*(\lambda_1 T-S)i_n,\Omega\cap X_n,0)=\deg(h_n i_n^*(\lambda_2 T-S)i_n,\Omega\cap X_n,0).$$

Beweis:

Zunächst seien $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$ und o.B.d.A. gelte $\lambda_1\leq\lambda_2$. Wir beweisen dann die Behauptung mit Lemma 5.1 und definieren hierzu $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ durch

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times\Delta:\quad H(t,x):=(\lambda_1+t(\lambda_2-\lambda_1))Tx-Sx.$$

Unter den gestellten Anforderungen ist nun offenbar H eine halbstetige Abbildung von $[0,1]\times\overline{\Omega}$ in X^* und für jedes feste $t\in[0,1]$ der Operator $H(t,\cdot):\overline{\Omega}\to X^*$ beschränkt. Darüber hinaus folgt aus

(7.7) $\quad \forall t\in[0,1]:\ 0<\lambda_1\leq\lambda_1+t(\lambda_2-\lambda_1)\leq\lambda_2\leq 1$

zusammen mit Lemma[1.2], [77], S.19, daß für jedes $t\in[0,1]$ $H(t,\cdot):\Delta\to X^*$ auch der Bedingung (S) genügt. Weiter ergibt sich nach (7.7) und (7.6):

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega:\quad H(t,x)\neq 0.$$

Damit haben wir bereits die Voraussetzungen (i), (iii), (iv) und (v) von Lemma 5.1 verifiziert. Wenden wir uns also jetzt dem Punkt (ii) zu. Da dieser für $\lambda_1=\lambda_2$ trivialerweise erfüllt ist, sei nun $\lambda_1<\lambda_2$ und weiter

$$0<M:=\sup_{x\in\partial\Omega}\|Tx\|+1<\infty,$$

denn $T:\Delta\to X^*$ ist beschränkt. Für ein beliebiges, aber fest gewähltes $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ setzen wir dann $\delta:=\varepsilon/M(\lambda_2-\lambda_1)\in\mathbb{R}^+$ und erhalten für alle $s,t\in[0,1]$ mit $|s-t|<\delta$ und jedes $x\in\partial\Omega$:

$$\|H(s,x)-H(t,x)\|=|s-t|(\lambda_2-\lambda_1)\|Tx\|<\delta(\lambda_2-\lambda_1)M=\varepsilon.$$

Insgesamt können wir daher Lemma 5.1(b) anwenden, woraus wegen $H(0,\cdot)=\lambda_1 T-S$ und $H(1,\cdot)=\lambda_2 T-S$ die Behauptung folgt.

Den Fall $\lambda_1,\lambda_2\in[-1,0)$ beweist man analog.

q.e.d.

Zusätzlich zu unseren generellen Voraussetzungen benötigen wir für unsere nächste Aussage noch, daß der Raum X unendlichdimensional ist.

Lemma 7.8.

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $S,T:\Delta\to X^*$, S vollstetig und T halbstetig und beschränkt. Ferner erfülle T die Bedingung (S) und

(7.8) $\quad \exists M,l\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},0<|\lambda|\leq l\forall x\in\partial\Omega\forall y\in X^*,\|y\|\leq M:\ \lambda Tx-Sx+y\neq 0.$

Dann folgt:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},0<|\lambda|\leq l\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0:\ \deg(h_n i_n^*(\lambda T-S)i_n,\Omega\cap X_n,0)=0.$$

Beweis:

Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h.

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R},0<|\lambda_0|\leq l\forall n_0\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N},n\geq n_0:$$
$$\deg(h_n i_n^*(\lambda_0 T-S)i_n,\Omega\cap X_n,0)\neq 0.$$

Demnach gibt es eine Folge $(n_k)\subset\mathbb{N}$ mit

$$\forall k\in\mathbb{N}:\ n_k<n_{k+1}\ \text{und}\ \deg(h_{n_k} i_{n_k}^*(\lambda_0 T-S)i_{n_k},\Omega\cap X_{n_k},0)\neq 0,$$

wobei wir im weiteren noch $\lambda_0\in(0,1]$ unterstellen (den Fall $\lambda_0\in[-1,0)$ behandelt man ganz analog). Somit liefert die Anwendung von Lemma 7.7:

(7.9) $\quad \forall\lambda\in(0,1]\exists k_0(\lambda)\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N},k\geq k_0(\lambda):$

$$\deg(h_{n_k} i_{n_k}^*(\lambda T-S)i_{n_k},\Omega\cap X_{n_k},0)=$$
$$=\deg(h_{n_k} i_{n_k}^*(\lambda_0 T-S)i_{n_k},\Omega\cap X_{n_k},0)\neq 0.$$

Betrachten wir also jetzt ein beliebiges, aber fest gewähltes $\lambda\in(0,1]$. Ebenso sei $y\in X^*$, $\|y\|\leq M$ beliebig, aber fest und hierfür $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ definiert durch

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times\Delta:\ H(t,x):=\lambda Tx-Sx+ty.$$

Wie man nun mit den gewohnten Argumenten sofort einsieht, erfüllt die so erklärte Abbildung H unter den hier gemachten Voraussetzungen die Bedingungen (i) bis (v) von Lemma 5.1(b), so daß zusammen mit $H(0,\cdot)=\lambda T-S$ und $H(1,\cdot)=\lambda T-S+y$ folgt:

(7.10) $\exists n_0(\lambda,y)\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0(\lambda,y)$:

$$\deg(h_n i_n^*(\lambda T-S)i_n,\Omega\cap X_n,0)=\deg(h_n i_n^*(\lambda T-S+y)i_n,\Omega\cap X_n,0).$$

Hieraus wiederum erhalten wir unter Berücksichtigung von (7.9):

$$\exists \tilde{k}_0(\lambda,y)\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}, k\geq\tilde{k}_0(\lambda,y):$$

$$\deg(h_{n_k} i_{n_k}^*(\lambda T-S+y)i_{n_k},\Omega\cap X_{n_k},0)\neq 0.$$

Danach gibt es aber (vgl. Beweis von Satz 5.2(b)) zu jedem $k\in\mathbb{N}$, $k\geq\tilde{k}_0(\lambda,y)$, ein $x_{n_k}\in\Omega\cap X_{n_k}$ mit

$$\|\lambda Tx_{n_k}-Sx_{n_k}+y\|_{X_{n_k}^*}=0,$$

woraus sich (vgl. Beweis von Lemma 5.1(a), Teil (I)) auf die Existenz eines $x_0\in\Omega$ mit

$$\|\lambda Tx_0-Sx_0+y\|_{X^*}=0$$

schließen läßt. Insgesamt hat sich demnach ergeben:

(7.11) $\forall\lambda\in(0,1]\forall y\in X^*, \|y\|\leq M\exists x\in\Omega:\ \lambda Tx-Sx+y=0.$

Ist jetzt wieder $y\in X^*$, $\|y\|\leq M$ beliebig, aber fest und (λ_n) eine Nullfolge aus $(0,1]$, so wählen wir nach (7.11) eine Folge $(x_n)\subset\Omega$ mit

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \lambda_n Tx_n-Sx_n+y=0$$

aus, d.h.

$$Sx_n-y=\lambda_n Tx_n\to 0$$

für $n\to\infty$, denn $T(\Omega)$ ist beschränkt. Da $y\in X^*$, $\|y\|\leq M$, beliebig war, bedeutet dies

(7.12) $$\overline{S(\Omega)}\supset\{y\in X^*\mid \|y\|\leq M\}.$$

Weiter ergibt die Vollstetigkeit von S die Kompaktheit der Menge $\overline{S(\Omega)}$ und wegen (7.12) also auch die der

$$\{y\in X^*\mid \|y\|\leq M\}$$

(vgl. Lemma[1], [20], S.125). Letzteres ist aber genau dann der Fall, wenn der Raum X^* endlichdimensional ist (vgl. Lemma

[24.2], [28], S.103). Folglich haben wir mit

$$\dim(X) = \dim(X^*) < \infty \quad .$$

(vgl. Satz[28.4], [47], S.213) einen Widerspruch zur Voraussetzung $\dim(X)=\infty$ erhalten, und das Lemma ist bewiesen.

q.e.d.

Nunmehr sind wir in der Lage, unser Hauptergebnis zu formulieren. Es gilt der

Satz 7.9. (Existenzsatz für asymptotische Verzweigungspunkte)

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $S,T:X\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig, beschränkt und ungerade, $S,T\in Q(\varphi,A,X^*)$, $d(\varphi,A,X^*)(S)>0$ und $d(\varphi,A,X^*)(T)>0$. Ferner erfülle T die Bedingung (S). Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S)\cap\mathbb{R}^+ \neq \phi \neq \Gamma^A(T,S)\cap\mathbb{R}^- .$$

Beweis:

Zunächst wählen wir ein $l\in\mathbb{R}^+$ mit $l\cdot q(T)<d(S)$ aus und erhalten vermöge Lemma 7.6:

$$(7.13)\qquad \exists R\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq l\forall x\in A,\|x\|\geq R\forall y\in X^*,\|y\|\leq 1:\ \lambda Tx-Sx+y\neq 0.$$

Berücksichtigt man jetzt noch, daß nach unserer generellen Voraussetzung (7.3) für

$$m_k := \inf_{x\in\partial\Omega_k}\|x\| \quad (k\in\mathbb{N})$$

der

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$$

und außerdem $\partial\Omega_k\subset A$ $(k\in\mathbb{N})$ ist, so ergibt sich zusammen mit (7.13):

$$(7.14)\qquad \exists k_0\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N},k\geq k_0\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq l\forall x\in\partial\Omega_k\forall y\in X^*,\|y\|\leq 1:\ \lambda Tx-Sx+y\neq 0.$$

Nun werden wir zeigen, daß das Paar (T,S) einen positiven aVP bez. A besitzt (die Existenz eines negativen weist man analog nach). Hierzu seien $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit

(7.15) $\quad 0 < \lambda_1 \leq 1 < \lambda_2$ und $\lambda_2 > \frac{q(S)}{d(T)}$

beliebig, aber ein für allemal fest bestimmt.

Ist darüber hinaus $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ beliebig, aber fest, dann bekommen wir nach (7.14) und Lemma 7.8 (dort setzen wir $\Delta := X$, $\Omega := \Omega_k$ und $M := 1$):

(7.16) $\quad \exists n_1(k) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1(k)$: $\deg(h_n i_n^*(\lambda_1 T - S) i_n, \Omega_k \cap X_n, 0) = 0$.

Weiter definieren wir $H: [0,1] \times X \to X^*$ durch

(7.17) $\quad \forall t \in [0,1]$: $H(t,\cdot) := (\lambda_1 + t(\lambda_2 - \lambda_1))T - S$

und entnehmen dem Beweis von Lemma 7.7, daß H die Voraussetzungen (i) bis (iv) von Satz 5.2 (mit $\Delta := X$ und $\Omega := \Omega_k$) erfüllt und wollen sehen, ob dies auch für die Bedingungen (vi) und (vii) zutrifft.

Dafür betrachten wir die Abbildung $G: [0,1] \times X \to X^*$ erklärt über

$$\forall t \in [0,1]: \quad G(t,\cdot) := H(1,\cdot) - tH(1,-\cdot).$$

Da T ungerade ist, erhält man für G die Darstellung

$$G(t,\cdot) = (1+t)\lambda_2 T - S + tS(-\cdot) \quad (t \in [0,1])$$

und liest hieran wie gewohnt ab, daß $G(t,\cdot): X \to X^*$ $(t \in [0,1])$ der Bedingung (S) genügt, d.h. der Punkt (vi) ist bereits verifiziert. Oberdies ergibt sich für jedes $t \in [0,1]$ aus der Symmetrie von A zusammen mit $S, T \in Q$ noch $G(t,\cdot) \in Q$ und

$$\begin{aligned} d(G(t,\cdot)) &\geq (1+t)\lambda_2 d(T) - q(-S + tS(-\cdot)) \\ &\geq (1+t)\lambda_2 d(T) - q(S) - tq(S(-\cdot)) \\ &= (1+t)(\lambda_2 d(T) - q(S)) > 0 \end{aligned}$$

nach (7.15). Schließlich ist wegen

$$G(t,\cdot) - G(t_0,\cdot) = (t - t_0)(\lambda_2 T + S(-\cdot)) \quad (t, t_0 \in [0,1])$$

sowie $\lambda_2 T + S(-\cdot) \in Q$ auch für alle $t_0 \in [0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ \|x\| \to \infty \\ t \in [0,1], x \in A}} \frac{\|G(t,x) - G(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Haben wir also o.B.d.A. k_0 von vornherein genügend groß gewählt, so erfüllt H nach Lemma 3.5(b), (7.3) und mittels $\partial\Omega_k \subset A$ auch die Voraussetzung (vii).

Nehmen wir jetzt an, der Operator $H:[0,1]\times X\to X^*$ genüge außerdem der Bedingung (v) von Satz 5.2, d.h.

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega_k:\quad H(t,x)\neq 0,$$

so wenden wir diesen an und zusammen mit $H(0,\cdot)=\lambda_1 T-S$ folgt:

$$\exists n_0(k)\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0(k):\ \deg(h_n i_n^*(\lambda_1 T-S)i_n,\Omega_k\cap X_n,0)\neq 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (7.16), und es hat sich ergeben:

$$\forall k\in\mathbb{N},k\geq k_0\ \exists t_k\in[0,1]\exists x_k\in\partial\Omega_k:$$
$$0=H(t_k,x_k)=(\lambda_1+t_k(\lambda_2-\lambda_1))Tx_k-Sx_k.$$

Ferner ist dabei wegen (7.3) der

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k\|=\infty.$$

Wählen wir demnach eine konvergente Teilfolge (t_{k_i}) der Folge $(t_k)_{k\geq k_0}$ aus, etwa mit

$$\lim_{i\to\infty} t_{k_i}=:\tilde{t}\in[0,1],$$

dann ist

$$\lambda_1+\tilde{t}(\lambda_2-\lambda_1)\in[\lambda_1,\lambda_2]\subset\mathbb{R}^+$$

offenbar ein positiver aVP des Paares (T,S) bez. $\bigcup_{k=1}^{\infty}\partial\Omega_k\subset A$.

q.e.d.

Mit Satz 7.9 haben wir ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren erhalten, ohne dabei die asymptotische Linearität bzw. Homogenität von S und T zu fordern. Ebenso setzen wir keine Vielfachheitseigenschaften des Parameters λ voraus (vgl. Einleitung). Ein vergleichbares Ergebnis für Abbildungen eines BANACH-Raumes X in seinen Dualraum X^* ist uns nicht bekannt.

Bemerkung 7.10.

In Satz 7.9 kann auf die Bedingung "$\dim(X)=\infty$" *nicht* verzichtet werden.

Beweis:

Wir belegen die Behauptung durch ein einfaches Beispiel. Hierzu sei $X:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=Tx:=x$ für $x\in\mathbb{R}$. Offensichtlich sind dann $S,T\in Q(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$d(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(S) = d(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(T) = 1 > 0.$$

Weiterhin ist klar, daß dieses Beispiel auch allen übrigen Voraussetzungen von Satz 7.9 - mit Ausnahme der Forderung "$\dim(X)=\infty$" natürlich - genügt. Andererseits folgt aus

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\lambda\in\mathbb{R}:\quad \lambda Tx - Sx = (\lambda-1)x$$

und Lemma 7.2(a) (mit $S_0:=S$ und $T_0:=T$)

$$\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)\subset\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S) = \{1\},$$

d.h. das Paar (T,S) besitzt keinen negativen aVP bez. $\mathbb{R}$. Obendies gilt hier trivialerweise sogar

$$\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S) = \Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S) = \{1\}.$$

q.e.d.

Als Konsequenz ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 7.9, daß das φ-asymptotische Spektrum $\Sigma_\varphi^A(T,S)$ des Paares (T,S) bez. A nichtleer ist. Dies zeigen wir mit

Korollar 7.11. (Existenzsatz für φ-asymptotische Eigenwerte)

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $S,T:X\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig, beschränkt und ungerade, $S,T\in Q(\varphi,A,X^*)$ und $d(\varphi,A,X^*)(T)>0$. Ferner erfülle T die Bedingung (S). Dann folgt:

$$0\in\Sigma_\varphi^A(T,S) \quad\text{oder}\quad \Sigma_\varphi^A(T,S)\cap\mathbb{R}^+\neq\phi\neq\Sigma_\varphi^A(T,S)\cap\mathbb{R}^-.$$

Beweis:

Ist $0\in\Sigma_\varphi^A(T,S)$, so ist die Behauptung bewiesen. Andernfalls folgt aus $0\notin\Sigma_\varphi^A(T,S)$ sofort $d(\varphi,A,X^*)(S)>0$, und das Paar (T,S) besitzt nach Satz 7.9 einen positiven und einen negativen aVP bez. A. Diese wiederum sind Elemente des φ-asymptotischen Spektrums $\Sigma_\varphi^A(T,S)$, wie aus Lemma 7.2(a) (mit $S_0:=S$ und $T_0:=T$) folgt.

q.e.d.

Bemerkung 7.12.

Unter den Voraussetzungen von Korollar 7.11 ist die folgende Aussage *falsch*:

Entweder ist $0 \in \Sigma_{\varphi}^{A}(T,S)$ oder $\Sigma_{\varphi}^{A}(T,S) \cap \mathbb{R}^{+} \neq \phi \neq \Sigma_{\varphi}^{A}(T,S) \cap \mathbb{R}^{-}$.

Beweis:

Wir geben ein Beispiel an. Es sei $X=X^{*}=A$ der reelle LEBESGUE-Raum $(L^{2}([0,1]),\|\cdot\|_{2})$, $\varphi(t):=t$ für $t \in \mathbb{R}_{0}^{+}$, y_{0} ein festes Element aus X mit $\|y_{0}\|_{2}=1$ und $Sx:=\|x\|_{2}\|\sin(\|x\|_{2})\|y_{0}$ sowie $Tx:=x$ für $x \in X$.

Bekanntlich ist dann der BANACH-Raum X reflexiv, separabel und unendlichdimensional sowie offenbar $S:X \to X^{*}$ vollstetig, $T:X \to X^{*}$ halbstetig, beschränkt und ungerade. Darüber hinaus genügt T wegen

$$\forall u,v \in X: \quad (Tu-Tv,u-v) = (u-v,u-v) = \|u-v\|_{2}^{2}$$

auch der Bedingung (S). Schließlich ist klar, daß S und T Elemente aus $Q(1,X,X^{*})$ sind und außerdem $d(1,X,X^{*})(T)=1>0$ gilt, womit insgesamt die Voraussetzungen von Korollar 7.11 verifiziert wären.

Andererseits wird für

$$x_{n} := n\pi y_{0} \quad (n \in \mathbb{N})$$

die

$$\|x_{n}\|_{2} = n\pi\|y_{0}\|_{2} = n\pi, \quad Sx_{n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

und also

$$0 \leq d(1,X,X^{*})(S) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\|Sx_{n}\|_{2}}{\|x_{n}\|_{2}} = 0,$$

d.h. $0 \in \Sigma_{1}^{X}(T,S)$.

Betrachten wir jetzt weiter

$$u_{n} := \frac{2n+1}{2}\pi y_{0} \quad \text{bzw.} \quad v_{n} := -\frac{2n+1}{2}\pi y_{0} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

so folgt analog aus

$$1 \cdot Tu_{n} - Su_{n} = \frac{2n+1}{2}\pi y_{0} - \frac{2n+1}{2}\pi y_{0} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

bzw.

$$(-1)Tv_n - Sv_n = \frac{2n+1}{2}\pi y_o - \frac{2n+1}{2}\pi y_o = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Überdies $\pm 1 \in \Sigma_1^X(T,S)$.

q.e.d.

Darüber hinaus erhalten wir abschließend ein Ergebnis über die Existenz von Eigenwerten (im üblichen Sinne) eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren, wenn die in Satz 7.9 betrachteten Abbildungen zusätzlich homogen sind.

Korollar 7.13. (Existenzsatz für Eigenwerte)

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $a \in \mathbb{R}^+$, $S,T: X \to X^*$, S vollstetig und a-homogen, T halbstetig, beschränkt, ungerade und a-homogen, $S,T \in Q(a,A,X^*)$, $d(a,A,X^*)(S)>0$ und $d(a,A,X^*)(T)>0$. Ferner erfülle T die Bedingung (S). Dann folgt:

$\sigma^A(T,S) \cap \mathbb{R}^+ \neq \phi \neq \sigma^A(T,S) \cap \mathbb{R}^-$.

Beweis:

Nach Satz 7.9 und Lemma 7.2(a) (mit $S_o := S$ und $T_o := T$) gibt es ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ und ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma_a^A(T,S)$. Der Beweis von Korollar 6.7 zeigt aber, daß unter den hier gemachten Voraussetzungen $\Sigma_a^A(T,S) \setminus \{0\} = \sigma^A(T,S) \setminus \{0\}$ ist.

q.e.d.

§ 8. ANWENDUNGEN: NICHTLINEARE INTEGRALGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt betrachten wir *URYSONsche Integralgleichungen* der Form

$$(8.1) \qquad \lambda[Tu](x) - g(u) \int_G k(x,y,u(y))\, dy = w(x) \quad (x \in G).$$

Dabei ist hier und im folgenden λ ein reeller Parameter, T ein nicht notwendig linearer Operator, g eine reellwertige Funktion (gegebenenfalls $g \equiv 1$), $G \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) meßbar und von endlichem positivem Maß, k eine Abbildung von $G \times G \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und etwa $w: G \to \mathbb{R}$ eine gegebene und $u: G \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion. Auftretende maß- und integrationstheoretische Begriffe wie z.B. "meßbar", "Maß", "Integral", "für fast alle" usw. beziehen sich ausschließlich auf das LEBESGUE-Maß und das System der BORELschen Mengen. Ferner verstehen wir unter dem Symbol $|G|$ das N-dimensionale (LEBESGUE-) Maß von G.

Ist weiter f eine Funktion von $G \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und h eine solche von $G \times G$ in $\mathbb{R}$, dann sind in den noch anzustellenden Oberlegungen insbesondere die *HAMMERSTEINschen Integralgleichungen*

$$(8.2) \qquad \lambda[Tu](x) - g(u) \int_G h(x,y)\, f(y,u(y))\, dy = w(x) \quad (x \in G)$$

enthalten.

Bezeichnen wir nun den *URYSONschen Integraloperator* aus (8.1) mit S, d.h.

$$(8.3) \qquad [Su](x) = g(u) \int_G k(x,y,u(y))\, dy \quad (x \in G),$$

so handelt es sich hier um spezielle Operatorgleichungen der Gestalt

$$\lambda Tu - Su = w.$$

Demnach können und werden wir zu diesen Betrachtungen die abstrakten Ergebnisse der §§ 6 und 7 heranziehen.

Hierfür ist zunächst zu klären, welche Funktionenräume wir unseren Ausführungen zugrunde legen. Üblicherweise sind dies bei Integralgleichungen LEBESGUE-Räume oder die allgemeineren ORLICZ-Räume. Letztere bieten sich vor allem dann an, wenn der *Kern* $k: G \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des URYSONschen Integraloperators S aus (8.3) bez. des dritten Arguments "schneller wächst" als jede Potenzfunktion. In diesen Fällen nämlich existieren offenbar keine LEBESGUE-Räume mehr, in denen der Integraloperator S wirkt, während es andererseits (unter weiteren geeigneten Voraussetzungen an k) durchaus ORLICZ-Räume X und Y gibt, die sogar die Vollstetigkeit von $S: X \to Y$ ergeben. Diese sind dann allerdings

weder reflexiv noch separabel (vgl. [35] und [81]), so daß wir uns hier mit Untersuchungen in LEBESGUE-Räumen begnügen müssen.

Wir halten also fest, daß für jedes $p\in(1,\infty)$ der (reelle) BANACH-Raum $L^p(G)$ mit der Norm $\|\cdot\|_p$ sowohl reflexiv als auch separabel ist und der Dualraum $[L^p(G)]^*$ von $L^p(G)$ repräsentiert wird durch $L^q(G)$ mit $p^{-1}+q^{-1}=1$. Dabei gilt für alle $v\in L^q(G)$ und $u\in L^p(G)$:

$$(v,u) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx.$$

Oberdies ist der Raum $L^p(G)$ unendlichdimensional (vgl. [9]).

Ist weiterhin f eine Abbildung von $G\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und der Operator F für $u:G\to\mathbb{R}$ und $x\in G$ erklärt durch

$$[Fu](x) := f(x,u(x)),$$

so heißt F normalerweise der von f erzeugte *NEMYTSKII-Operator*. Eine für Erzeuger von NEMYTSKII-Operatoren grundlegende Eigenschaft ist die *CARATHÉODORY-Bedingung (CB)*. Die Funktion $f:G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ genügt dieser Bedingung, falls für fast alle $x\in G$ die Abbildung $f(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und für jedes $u\in\mathbb{R}$ die Abbildung $f(\cdot,u):G\to\mathbb{R}$ meßbar ist.

Im übrigen setzen wir NEMYTSKII-Operatoren, lineare und nichtlineare Integraloperatoren sowie deren Eigenschaften in LEBESGUE-Räumen als bekannt voraus und verweisen hierzu auf [34], [37], [73], [81], [82] und - der guten Zugänglichkeit halber - vor allem auf [77]. Außerdem werden wir an Stelle von "für fast alle $x\in G$" stets "für alle $x\in G$" schreiben. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung, erlaubt uns aber andererseits die Verwendung der übersichtlichen Quantorenschreibweise.

Schließlich ist es für Integraloperatoren $S,S_0:L^p(G)\to L^q(G)$ der Form (8.3) ($p\in(1,\infty)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$) im Zusammenhang mit § 6 von besonderem Interesse, unter welchen Bedingungen für ein $a\in\mathbb{R}^+$ der

$$L^p(G)\text{-}\lim_{\|x\|_p\to\infty} \frac{\|Sx-S_0x\|_q}{\|x\|_p^a} = 0$$

ist. Gerade dieses Problem haben wir aber bereits ausführlich

(mit g≡1) in [77] diskutiert, so daß wir an dieser Stelle auf eine Wiederholung verzichten können. Statt dessen werden wir nur solche Gleichungen behandeln, welche die spezifischen Merkmale unserer neuen Theorie erkennen lassen und anderen Methoden nicht zugänglich sind.

§ 8.1. LÖSBARKEIT

Zuerst behandeln wir die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Gleichung

$$\lambda[Tu](x) - g(u) \int_G k(x,y,u(y))\,dy = w(x) \quad (x\in G)$$

bei vorgegebenen $p,q\in(1,\infty)$ mit $p^{-1}+q^{-1}=1$ für alle $w\in L^q(G)$ eine Lösung $u\in L^p(G)$ besitzt. Hierzu werten wir die wichtigsten Ergebnisse des sechsten Paragraphen aus und erhalten somit in der Regel Aussagen vom FREDHOLM Typ.

Satz 8.1. (Satz vom FREDHOLM Typ)

Es sei $M\in\mathbb{R}$, $p,p_1,q,q_1,s\in(1,\infty)$, $r:=\max\{q_1,q\}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $p_1^{-1}+q_1^{-1}=1$, $r^{-1}+s^{-1}=1$, $k:G\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in L^{p_1}(G)\exists h\in L^r(G\times G)\forall(x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)| \leq |h(x,y)|(|c(y)|+b|u|^{p/p_1}).$$

Weiter seien $T,T_0:L^p(G)\to L^q(G)$ halbstetig und beschränkt, T_0 sei ungerade, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T+t(T_0-T):L^p(G)\to L^q(G)$ die Bedingung (S), $T,T_0\in Q(p\text{-}1,L^p(G),L^q(G))$, $T-T_0\in N(p\text{-}1,L^p(G),L^q(G))$ und $d(p\text{-}1,L^p(G),L^q(G))(T_0)>0$. Ist dann noch $g:L^p(G)\to\mathbb{R}$ eine vollstetige Funktion mit

$$(8.4)\qquad \mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty}\inf\Big(\frac{L^p(G)\text{-}\sup_{\|u\|_p=t}|g(u)|}{t^{\frac{p}{p_1}-(p-1)}}-M\Big)=0$$

und $S:L^p(G)\to L^q(G)$ definiert durch

$$(8.5)\qquad \forall u\in L^p(G)\,\forall x\in G:\quad [Su](x) := g(u)\int_G k(x,y,u(y))\,dy,$$

so folgt:

Es gibt eine unbeschränkte Teilmenge A von $L^p(G)$ mit

(a) $S\in Q(p-1,A,L^q(G))$.

(b) Für jedes λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma^A_{p-1}(T_o,S)\cup\{0\})$ ist die Abbildung $\lambda T-S:L^p(G)\to L^q(G)$ gleichmäßig (p-1)-asymptotisch regulär surjektiv bez. A.

$$(c)\ \forall\lambda\in\Sigma^A_{p-1}(T_o,S):\quad |\lambda| \leq \frac{|M|\cdot b\cdot\|h\|_r}{d(p-1,A,L^q(G))(T_o)}\,|G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}.$$

Beweis: (Mit Satz 6.1(a).)

Wir definieren für (geeignete) $u:G\to\mathbb{R}$ einen Operator $\tilde{S}$ durch

$$[\tilde{S}u](x) := \int_G k(x,y,u(y))\,dy \quad (x\in G).$$

Nach Lemma[6.5], [77], S.59, ist dann $\tilde{S}$ eine vollstetige Abbildung von $L^p(G)$ in $L^q(G)$, und mit

$$\alpha := \|h\|_r\|c\|_{p_1}|G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}$$

sowie

$$\beta := b\|h\|_r|G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}$$

gilt für jedes $u\in L^p(G)$:

$$\|\tilde{S}u\|_q \leq \alpha+\beta\|u\|_p^{p/p_1}.$$

Insbesondere erhalten wir also zusammen mit der Vollstetigkeit von $g:L^p(G)\to\mathbb{R}$ auch die der Abbildung $S=g\cdot\tilde{S}:L^p(G)\to L^q(G)$. Weiter gibt es wegen (8.4) eine monoton wachsende Folge $(t_n)\subset\mathbb{R}^+$ mit $t_n\to\infty$ für $n\to\infty$ und

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{\|u\|_p=t_n}|g(u)|\,t_n^{\frac{p}{p_1}-(p-1)}-M\Big)=0.$$

Demnach bekommen wir für jedes $n\in\mathbb{N}$ und alle $u\in L^p(G)$, $\|u\|_p=t_n$:

$$\frac{\|Su\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} = \frac{|g(u)|\,\|\tilde{S}u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} \leq \frac{|g(u)|\,(\alpha+\beta\|u\|_p^{p/p_1})}{\|u\|_p^{p-1}} \cdot$$

$$= \alpha\frac{|g(u)|}{t_n^{p-1}} + \beta|g(u)t_n^{\frac{p}{p_1}-(p-1)}|$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{t_n^{p/p_1}}+\beta\right)(|g(u)t_n^{\frac{p}{p_1}-(p-1)} - M| + |M|)$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{t_n^{p/p_1}}+\beta\right)\Big(\sup_{\|u\|_p=t_n,\ u\in L^p(G)} |g(u)t_n^{\frac{p}{p_1}-(p-1)} - M| + |M|\Big) \to \beta|M|$$

für $n\to\infty$. Ist nun $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, dann gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ und jedes $u\in L^p(G)$, $\|u\|_p=t_n$, gilt:

$$\frac{\|Su\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} \leq \beta|M| + \varepsilon.$$

Setzen wir daher

$$\Omega_n := \{u\in L^p(G) \mid \|u\|_p < t_n\} \quad (n\in\mathbb{N})$$

und

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial\Omega_n = \{u\in L^p(G) \mid \exists n\in\mathbb{N}: \|u\|_p = t_n\},$$

so wird - (t_n) ist ja monoton - für jedes $u\in A$, $\|u\|_p > t_{n_0}$, die

$$\|Su\|_q \leq (\beta|M|+\varepsilon)\|u\|_p^{p-1}.$$

Hiernach ist aber $S\in Q(p-1,A,L^q(G))$ mit

$$q(p-1,A,L^q(G))(S) \leq \beta|M| = |M|b\|h\|_r|G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \tag{8.6}$$

und also der Teil (a) bewiesen.

Überdies ergibt sich aus $T,T_0\in Q(p-1,L^p(G),L^q(G))$ bzw. $T-T_0\in N(p-1,L^p(G),L^q(G))$ bzw. $d(p-1,L^p(G),L^q(G))(T_0)>0$ noch $T,T_0\in Q(p-1,A,L^q(G))$ bzw. $T-T_0\in N(p-1,A,L^q(G))$ bzw. $d(p-1,A,L^q(G))(T_0)>0$. Folglich ist mit $S_0:=S$ für jedes λ aus einer unbe-

schränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma^A_{p-1}(T_o,S_o)\cup\{0\})$ offensichtlich auch

$$q(p-1,A,L^q(G))(\lambda(T-T_o)+(S_o-S)) =$$
$$= 0 < d(p-1,A,L^q(G))(\lambda T_o - S_o).$$

Insgesamt schließen wir dann über Satz 6.1(a) (dort setzen wir natürlich $X:=L^p(G)$ und $\varphi(t):=t^{p-1}$ für $t\in\mathbb{R}^+_o$) auf Teil (b) der Behauptung, während Teil (c) eine direkte Folge von Lemma 4.3(a) und (8.6) ist.

q.e.d.

Kann als Sonderfall in (8.4) speziell M=0 gewählt werden, so ist $\Sigma^A_{p-1}(T_o,S)\cup\{0\}=\{0\}$, und wir erhalten die Surjektivität von $\lambda T-S:L^p(G)\to L^q(G)$ für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Darüber hinaus ist (8.4) insbesondere für $g\equiv 1$, $p/p_1<p-1$ und M=0 sowie $g\equiv 1$, $p/p_1=p-1$ und M=1 erfüllt. Schließlich bleibt es für die Aussage von Satz 8.1 ohne Bedeutung, ob wir den Operator $S:L^p(G)\to L^q(G)$ über (8.5) oder durch

$$\forall u\in L^p(G)\,\forall x\in G:$$
$$[Su](x) := g(u)\int_G k(x,y,u(y))\,dy + [S_1u](x)$$

erklären, wobei S_1 eine vollstetige Abbildung von $L^p(G)$ in $L^q(G)$ mit

$$L^p(G)\text{-}\lim_{\|u\|_p\to\infty}\frac{\|S_1u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} = 0$$

ist (vgl. Lemma 2.10).

Nachfolgend geben wir konkrete Operatoren T und T_o an, die allen Voraussetzungen von Satz 8.1 (für p=n+1) genügen.

Beispiel 8.2.

Es sei $n\in\mathbb{N}$, $a_i\in\mathbb{R}^+_o$ für i=0,1,...,n, $a_n>0$ und $f,f_o:G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall(x,u)\in G\times\mathbb{R}:$$
$$f(x,u) := a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1} \quad\text{und}\quad f_o(x,u) := a_n u|u|^{n-1}.$$

Dann folgt für die von f bzw. f_0 erzeugten NEMYTSKII-Operatoren T bzw. T_0:

(a) Für jedes $t\in[0,1]$ ist $T+t(T_0-T)$ eine beschränkte und stetige Abbildung von $L^{n+1}(G)$ in $L^{1+\frac{1}{n}}(G)$, welche die Bedingung (S^+) erfüllt.

(b) Für jedes $t\in[0,1]$ ist $T-tT(-\cdot)$ eine beschränkte und stetige Abbildung von $L^{n+1}(G)$ in $L^{1+\frac{1}{n}}(G)$, welche die Bedingung (S^+) erfüllt.

(c) $T_0:L^{n+1}(G)\to L^{1+\frac{1}{n}}(G)$ ist ungerade und n-homogen.

(d) $T,T_0\in Q(n,L^{n+1}(G),L^{1+\frac{1}{n}}(G))$ mit $T-T_0\in N(n,L^{n+1}(G),L^{1+\frac{1}{n}}(G))$ und $d(n,L^{n+1}(G),L^{1+\frac{1}{n}}(G))(T_0)=a_n>0$.

Beweis:

Ad.(a): Für ein beliebiges, aber fest gewähltes $t\in[0,1]$ definieren wir $f_t:G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$\forall(x,u)\in G\times\mathbb{R}:\quad f_t(x,u) := f(x,u) + t(f_0(x,u)-f(x,u)).$$

Ist dann F_t der von f_t erzeugte NEMYTSKII-Operator, so folgt sofort

$$F_t = T + t(T_0-T).$$

Ferner erhalten wir für jedes $(x,u)\in G\times\mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}(8.7)\qquad f_t(x,u) &= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1} + \\ &\quad + t(a_n u|u|^{n-1} - a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1}) \\ &= a_n u|u|^{n-1} + (1-t)(a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i u|u|^{i-1}),\end{aligned}$$

d.h. $f_t:G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfüllt die CB, und es ist der

$$|f_t(x,u)| \le a_n|u|^n + (1-t)(a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i|u|^i)$$

und also

$$(8.8) \qquad |f_t(x,u)| \le \sum_{i=0}^{n} a_i |u|^i \le (\sum_{i=0}^{n} a_i)(1 + |u|^n).$$

Überdies ergibt sich für jedes $x \in G$ und $u \in \mathbb{R}$ nach (8.7) noch

$$f_t(x,u)u = a_n|u|^{n+1} + (1-t)(a_0 u + \sum_{i=1}^{n-1} a_i |u|^{i+1})$$

$$\ge a_n|u|^{n+1} - a_0|u| \ge \tfrac{1}{2}a_n|u|^{n+1} - M$$

mit einer gewissen Konstanten $M \in \mathbb{R}^+$. Schließlich ist wegen (8.7) offensichtlich $f_t(x,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes feste $x \in G$ auch streng monoton wachsend. Insgesamt bekommen wir daher die Behauptung mit Lemma[6.2], [77], S.56.

Ad.(b): Es sei wieder $t \in [0,1]$ beliebig, aber fest gewählt. Diesmal erklären wir $f_t: G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}: \quad f_t(x,u) := f(x,u) - tf(x,-u).$$

Ist dann F_t der von f_t erzeugte NEMYTSKII-Operator, so folgt unmittelbar

$$F_t = T - tT(-\cdot).$$

Ferner erhalten wir für jedes $(x,u) \in G \times \mathbb{R}$ die Darstellung

$$f_t(x,u) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1} - t(a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1})$$

$$= (1-t)a_0 + (1+t)\sum_{i=1}^{n} a_i u|u|^{i-1},$$

woraus sich die Aussage analog zum Fall (a) ergibt.

Ad.(c): Die Behauptung ist trivial.

Ad.(d): Für $t \in [0,1]$ seien abermals f_t und F_t definiert wie im Beweis von Teil (a), d.h. insbesondere ist $F_t: L^{n+1}(G) \to L^{1+\frac{1}{n}}(G)$. Außerdem wird wegen (8.8) für jedes $x \in G$ und alle $u \in L^{n+1}(G)$ der

$$|[F_t u](x)| = |f_t(x,u(x))| \le (\sum_{i=0}^{n} a_i)(1 + |u(x)|^n)$$

und weiter die

$$\|F_t u\|_{1+\frac{1}{n}} \leq \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big[\Big(\int_G 1\,dx\Big)^{\frac{n}{n+1}} + \Big(\int_G |u(x)|^{n\frac{n+1}{n}}\,dx\Big)^{\frac{n}{n+1}}\Big]$$

$$= \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big[|G|^{\frac{n}{n+1}} + (\|u\|_{n+1})^n\Big]$$

$$\leq 2\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)(\|u\|_{n+1})^n,$$

falls die $\|u\|_{n+1} \geq R$ ist mit einer gewissen Konstanten $R \in \mathbb{R}^+$, d.h.

$$F_0 = T, F_1 = T_0 \in Q(n, L^{n+1}(G), L^{1+\frac{1}{n}}(G)).$$

Überdies ist nach Beispiel[9.3], [77], S.92, noch der

$$L^{n+1}(G)\text{-}\lim_{\|u\|_{n+1}\to\infty} \frac{\|(T-T_0)u\|_{1+\frac{1}{n}}}{(\|u\|_{n+1})^n} = 0$$

und also mit Lemma 2.10

$$T - T_0 \in N(n, L^{n+1}(G), L^{1+\frac{1}{n}}(G)).$$

Weiter bekommen wir für alle $u \in L^{n+1}(G)$:

$$\|T_0 u\|_{1+\frac{1}{n}} = a_n\Big(\int_G |u(x)|^{n\frac{n+1}{n}}\,dx\Big)^{\frac{n}{n+1}} = a_n(\|u\|_{n+1})^n.$$

Damit wird aber

$$d(n, L^{n+1}(G), L^{1+\frac{1}{n}}(G))(T_0) = a_n > 0.$$

q.e.d.

Unter Berücksichtigung von Beispiel 8.2 bringen wir zur Veranschaulichung von Satz 8.1 noch das

Beispiel 8.3.

Es sei $\varepsilon \in (0,2)$ und $r := \max\{2/\varepsilon, 2\}$. Ferner erfülle $k: G\times G\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die CB und

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in L^{\frac{2}{2-\varepsilon}}(G)\exists h\in L^r(G\times G)\forall(x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)|\leq|h(x,y)|\,(|c(y)|+b|u|^{2-\varepsilon}).$$

Dann folgt:

Es gibt eine unbeschränkte Teilmenge A von $L^2(G)$, so daß für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Gleichung

$$\lambda u(x) - e^{\|u\|_2}\sin(\|u\|_2)\int_G k(x,y,u(y))\,dy = w(x) \qquad (u,w\in L^2(G))$$

gleichmäßig 1-asymptotisch regulär lösbar bez. A ist.

Beweis: (Mit Satz 8.1 und Beispiel 8.2.)

Wir setzen $p:=q:=2$, $p_1:=\frac{2}{2-\varepsilon}>1$ und $q_1:=\frac{2}{\varepsilon}>1$. Damit wird $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $\max\{q_1,q\}=\max\{\frac{2}{\varepsilon},2\}=r$, $\frac{p}{p_1}=2-\varepsilon$ und $\frac{p}{p_1}-(p-1)=1-\varepsilon$. Überdies ist der für $u:G\to\mathbb{R}$ durch

$$[T_0u](x) := u(x) \quad (x\in G)$$

erklärte Operator T_0 nach Beispiel 8.2 (mit $n:=1$ und $a_n:=1$) eine stetige, beschränkte und ungerade Abbildung von $L^2(G)$ in $L^2(G)$, welche die Bedingung (S) erfüllt. Außerdem ist T_0 ein Element von $Q(1,L^2(G),L^2(G))$ mit $d(1,L^2(G),L^2(G))(T_0)=1>0$. Darüber hinaus definieren wir noch eine Funktion $g:L^2(G)\to\mathbb{R}$ mittels

$$\forall u\in L^2(G):\quad g(u) := e^{\|u\|_2}\sin(\|u\|_2).$$

Offenbar ist g vollstetig und der

$$\mathbb{N}\text{-}\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\|u\|_2=n\pi}^{L^2(G)}|g(u)(n\pi)^{1-\varepsilon}|\right)=0,$$

d.h. insbesondere auch der

$$\mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty}\inf\left(\sup_{\|u\|_2=t}^{L^2(G)}|g(u)t^{1-\varepsilon}|\right)=0.$$

Setzen wir daher noch $T:=T_0$ und $M:=0$, so folgt die Behauptung mit Satz 8.1.

q.e.d.

Auf die Gleichung (8.9) ist kein anderer uns bekannter abstrakter Satz anwendbar. Denn betrachten wir die Integralgleichung (8.1) speziell für $T:=I$ im Raum $L^2(G)$, so mußte der URYSON-Operator $S:L^2(G)\to L^2(G)$ aus (8.3) - sofern an seinen Kern $k:G\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ keine zusätzlichen Einschränkungen gemacht wurden - bisher stets einer Ungleichung der Form

$$\exists b,c\in\mathbb{R}^+\forall u\in L^2(G):\quad \|Su\|_2\leq b+c\,\|u\|_2$$

genügen (Stichworte: Asymptotisch lineare Abbildungen, quasibeschränkte Abbildungen.).

Nunmehr werden wir, nachdem mit Satz 8.1 bereits eine Aussage vom FREDHOLM Typ für nichtlineare Integralgleichungen vorliegt, eine FREDHOLMsche Alternative für solche Gleichungen herleiten. Weil wir dabei ohnehin keine größtmögliche Allgemeingültigkeit anstreben können, beschränken wir uns auf den

Satz 8.4. (FREDHOLMsche Alternative)

Es sei $n\in\mathbb{N}$, $p_1,q_1\in(1,\infty)$, $r:=\max\{q_1,1+\frac{1}{n}\}$, $p_1^{-1}+q_1^{-1}=1$, $a_i\in\mathbb{R}_0^+$ für $i=0,1,\ldots,n$, $a_n>0$, $k:G\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in L^{p_1}(G)\exists h\in L^r(G\times G)\forall(x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)|\leq|h(x,y)|\,(|c(y)|+b|u|^{n+1/p_1}).$$

Ferner sei noch $f\in L^{n+1}(G)$ und $g:L^{n+1}(G)\to\mathbb{R}$ eine vollstetige Funktion mit

$$(8.10)\qquad \mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty}\inf\Big(L^{n+1}(G)\text{-}\sup_{\|u\|_{n+1}=t}|g(u)t^{\frac{n+1}{p_1}-n}|\Big)=0.$$

Dann folgt:

Es gibt eine unbeschränkte Teilmenge A von $L^{n+1}(G)\setminus\{0\}$, so daß für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt:

(a) Die Gleichung

$$(8.11)\qquad \lambda\Big(a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i u(x)|u(x)|^{i-1}\Big)-\int_G[f(y)u(y)|u(y)|^{n-1}+$$
$$+g(u)k(x,y,u(y))]\,dy=w(x)\quad(u\in L^{n+1}(G),\ w\in L^{1+\frac{1}{n}}(G))$$

ist genau dann gleichmäßig n-asymptotisch regulär lösbar bez. A, wenn die Gleichung

(8.12) $$\lambda a_n u(x)|u(x)|^{n-1} - \int_G f(y)u(y)|u(y)|^{n-1}\,dy = 0$$

in A keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung (8.12) besitzt genau dann in A keine Lösung, wenn

$$\lambda \neq \frac{1}{a_n}\int_G f(y)\,dy$$

ist.

Beweis: (Mit Korollar 6.7 und Beispiel 8.2.)

Zunächst gibt es nach (8.10) eine monoton wachsende Folge (t_j) aus $\mathbb{R}^+$ mit $t_j \to \infty$ für $j \to \infty$ und

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{\|u\|_{n+1}=t_j} |g(u)t_j^{\frac{n+1}{p_1}-n}|\Big) = 0.$$

Damit sei

$$\Omega_j := \{u\in L^{n+1}(G) \mid \|u\|_{n+1}<t_j\} \quad (j\in\mathbb{N})$$

und

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty}\partial\Omega_j = \{u\in L^{n+1}(G) \mid \exists j\in\mathbb{N}:\ \|u\|_{n+1}=t_j\} \subset L^{n+1}(G)\setminus\{0\}.$$

Ad.(a): Für $u\in L^{n+1}(G)$ und $x\in G$ definieren wir Operatoren S_0, S_1, T und T_0 durch

$$[S_0u](x) := \int_G f(y)u(y)|u(y)|^{n-1}\,dy,$$

$$[S_1u](x) := g(u)\int_G k(x,y,u(y))\,dy,$$

$$[Tu](x) := a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i u(x)|u(x)|^{i-1},$$

$$[T_0u](x) := a_n u(x)|u(x)|^{n-1}$$

und verifizieren nun für $S:=S_0+S_1$, S_0, T und T_0 die Voraussetzungen von Korollar 6.7 mit $X:=L^{n+1}(G)$ und $a:=n$. Für die Operatoren T und T_0 gelingt dies unmittelbar mittels Beispiel

8.2. Überdies ist S_0 nach Lemma[6.5], [77], S.59, eine vollstetige Abbildung von $L^{n+1}(G)$ in $L^{1+\frac{1}{n}}(G)$, Element von $Q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}($ $(G))$ und offensichtlich auch ungerade und n-homogen. Schließlich entnimmt man dem Beweis von Satz 8.1 (dort wäre p:=n+1, $q:=\frac{n+1}{n}$ und M:=0 zu setzen), daß S_1 eine vollstetige Abbildung von $L^{n+1}(G)$ in $L^{1+\frac{1}{n}}(G)$ und Element von $Q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}(G))$ mit $q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}(G))(S_1)=0$ ist. Insbesondere haben wir somit noch die Vollstetigkeit von $S:L^{n+1}(G)\to L^{1+\frac{1}{n}}(G)$ sowie $S\in Q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}(G))$ mit $q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}(G))(S-S_0)=q(n,A,L^{1+\frac{1}{n}}(G))(S_1)=0$ erhalten. Insgesamt folgt daher die Behauptung nach Korollar 6.7, denn $0\notin A$.

Ad.(b): Vorab ergibt sich aus $\lambda a_n\neq 0$ sofort, daß jede Lösung u aus $L^{n+1}(G)$ von (8.12) eine konstante Funktion ist.
Sei jetzt $u\in A\subset L^{n+1}(G)\setminus\{0\}$ eine Lösung von (8.12). Dann gibt es ein $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $u\equiv C$ und demnach

$$\lambda a_n C|C|^{n-1} - C|C|^{n-1}\int_G f(y)\,dy = 0,$$

d.h.

$$\lambda = \frac{1}{a_n}\int_G f(y)\,dy.$$

Ist umgekehrt

$$\lambda = \frac{1}{a_n}\int_G f(y)\,dy,$$

so setzen wir

$$u \equiv t_1|G|^{-\frac{1}{n+1}} > 0.$$

Offenbar ist nun u Element von $L^{n+1}(G)$, Lösung von (8.12) und wegen $\|u\|_{n+1}=t_1$ auch aus $\partial\Omega_1\subset A$.

q.e.d.

Wiederum ist klar, daß die Bedingung (8.10) vor allem für $g\equiv 1$ und $n+1/p_1<n$ erfüllt ist. Darüber hinaus erläutern wir auch unser letztes Ergebnis an einer etwas konkreteren Gleichung. Es gilt das

Beispiel 8.5.

Es sei $n\in\mathbb{N}$ ungerade, $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $r:=\max\{1+\frac{1}{\varepsilon},1+\frac{1}{n}\}$ und $G:=[0,1]$. Ferner erfülle $k:G\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die CB und

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in L^{1+\varepsilon}(G)\exists h\in L^r(G\times G)\forall(x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)|\leq|h(x,y)|(|c(y)|+b|u|^{\frac{n+1}{\varepsilon+1}}).$$

Dann folgt:

Es gibt eine unbeschränkte Teilmenge A von $L^{n+1}(G)\setminus\{0\}$, so daß für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt:

(a) Die Gleichung

$$\lambda u^n(x)-\int_0^1[y^2u^n(y)+e^{\|u\|_{n+1}\cos(\|u\|_{n+1})}\cdot k(x,y,u(y))]\,dy=w(x)\quad(u\in L^{n+1}(G),\ w\in L^{1+\frac{1}{n}}(G)) \tag{8.13}$$

ist genau dann gleichmäßig n-asymptotisch regulär lösbar bez. A, wenn die Gleichung

$$\lambda u^n(x)-\int_0^1 y^2u^n(y)\,dy=0 \tag{8.14}$$

in A keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung (8.14) besitzt genau dann in A keine Lösung, wenn $\lambda\neq\frac{1}{3}$ ist.

Beweis: (Mit Satz 8.4.)

Wir setzen $p_1:=1+\varepsilon>1$, $q_1:=1+\frac{1}{\varepsilon}>1$, $a_0:=a_1:=\ldots:=a_{n-1}:=0$ und $a_n:=1>0$. Damit wird das $\max\{q_1,1+\frac{1}{n}\}=\max\{1+\frac{1}{\varepsilon},1+\frac{1}{n}\}=r$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $\frac{n+1}{p_1}=\frac{n+1}{\varepsilon+1}$ und $\frac{n+1}{p_1}-n=\frac{1-n\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Weiter seien Funktionen $f:G\to\mathbb{R}$ und $g:L^{n+1}(G)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x\in G:\quad f(x):=x^2$$

und

$$\forall u\in L^{n+1}(G):\quad g(u):=e^{\|u\|_{n+1}\cos(\|u\|_{n+1})}.$$

Offenbar ist dann $f\in L^{n+1}(G)$, g vollstetig und überdies der

$$\mathbb{N}\text{-}\lim_{j\to\infty}\left(\overset{L^{n+1}(G)\text{-}\sup}{\underset{\|u\|_{n+1}=(2j+1)\pi}{}}\ |g(u)[(2j+1)\pi]^{\frac{1-n\varepsilon}{1+\varepsilon}}|\right) =$$

$$= \mathbb{N}\text{-}\lim_{j\to\infty} |e^{-(2j+1)\pi}[(2j+1)\pi]^{\frac{1-n\varepsilon}{1+\varepsilon}}| = 0,$$

d.h. auch der

$$\mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty}\inf\left(\overset{L^{n+1}(G)\text{-}\sup}{\underset{\|u\|_{n+1}=t}{}}\ |g(u)t^{\frac{1-n\varepsilon}{1+\varepsilon}}|\right) = 0.$$

Ferner wird

$$\frac{1}{a_n}\int_G f(y)\,dy = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}.$$

Da außerdem $n\in\mathbb{N}$ ungerade ist, folgt die Behauptung mit Satz 8.4.

q.e.d.

Die Gleichung (8.13) ist gleichfalls allen uns bisher bekannten abstrakten Sätzen nicht zugänglich.

§ 8.2. EXISTENZ VON ASYMPTOTISCHEN VERZWEIGUNGSPUNKTEN

In diesem Unterabschnitt beweisen wir ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von asymptotischen Verzweigungspunkten gewisser Integralgleichungen in L^p-Räumen. Hierzu ziehen wir unser abstraktes Ergebnis aus dem siebten Paragraphen heran und erhalten damit den

Satz 8.6. (Existenzsatz für asymptotische Verzweigungspunkte)

Es sei $G\subset\mathbb{R}^N$ $(N\in\mathbb{N})$ kompakt, $|G|>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $p,q,s\in(1,\infty)$, $r:=\max\{\{p,q\}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $r^{-1}+s^{-1}=1$, $h_0:G\times G\to\mathbb{R}$ meßbar mit

$$\exists m_0,M_0\in\mathbb{R}^+\forall(x,y)\in G\times G:\quad m_0\leq h_0(x,y)\leq M_0$$

und

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in G, |x_1 - x_2| < \delta \forall y \in G:$$
$$|h_0(x_1,y) - h_0(x_2,y)| < \varepsilon,$$

$f_0: G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists b_0, B_0 \in \mathbb{R}^+ \exists c_0 \in L^1(G) \forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}:$$
$$b_0 |u|^p - c_0(x) \leq f_0(x,u) \leq B_0 |u|^p + c_0(x),$$

$k: G \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists b \in \mathbb{R}^+ \exists c \in L^q(G) \exists h \in L^r(G \times G) \forall (x,y,u) \in G \times G \times \mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)| \leq |h(x,y)| (|c(y)| + b|u|^{p-1}).$$

Weiter sei $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$b \|h\|_r |G|^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} < m_0 b_0 |M| |G|^{\frac{1}{q}} \tag{8.15}$$

und $g: L^p(G) \to \mathbb{R}$ eine vollstetige Funktion mit

$$\mathbb{R}^+ - \lim_{t \to \infty} \inf \left({}^{L^p(G)}\text{-}\sup_{\|u\|_p = t} |g(u)t - M| \right) = 0. \tag{8.16}$$

Ist ferner $T \in Q(p-1, L^p(G), L^q(G))$ mit $d(p-1, L^p(G), L^q(G))(T) > 0$ eine halbstetige, beschränkte und ungerade Abbildung von $L^p(G)$ in $L^q(G)$, welche der Bedingung (S) genügt, dann folgt:

Die Gleichung

$$\lambda [Tu](x) - \int_G [g(u) h_0(x,y) f_0(y, u(y)) + k(x,y,u(y))] \, dy = 0$$

besitzt einen positiven und einen negativen asymptotischen Verzweigungspunkt bez. $L^p(G)$.

Beweis: (Mit Satz 7.9.)

Nach (8.16) gibt es eine monoton wachsende Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ mit

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty \tag{8.17}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} \left({}^{L^p(G)}\text{-}\sup_{\|u\|_p = t_n} |g(u)t_n - M| \right) = 0. \tag{8.18}$$

Damit sei

$$\Omega_n := \{u \in L^p(G) \mid \|u\|_p < t_n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial\Omega_n = \{u \in L^p(G) \mid \exists n \in \mathbb{N}: \|u\|_p = t_n\}.$$

Weiter erklären wir für $u \in L^p(G)$ und $x \in G$ Operatoren $\tilde{S}_0$, S_0 und S_1 durch

$$[\tilde{S}_0 u](x) := \int_G h_0(x,y) f_0(y,u(y))\, dy,$$

$$[S_0 u](x) := g(u)[\tilde{S}_0 u](x),$$

$$[S_1 u](x) := \int_G k(x,y,u(y))\, dy$$

und zeigen, daß die Abbildung $S := S_0 + S_1$ den Voraussetzungen von Satz 7.9 mit $X := L^p(G)$ und $\varphi(t) := t^{p-1}$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ genügt.

Zum Operator $\tilde{S}_0$: Unter den gestellten Bedingungen gilt für alle $(x,u) \in G \times \mathbb{R}$:

$$|f_0(x,u)| - |c_0(x)| \leq |f_0(x,u) + c_0(x)|$$
$$= f_0(x,u) + c_0(x) \leq B_0 |u|^p + 2c_0(x),$$

d.h.

$$|f_0(x,u)| \leq B_0 |u|^p + 3|c_0(x)|.$$

Nach den beiden Lemmata [6.1] und [6.4] in [77], S.55 und S.58, ist daher $\tilde{S}_0$ eine vollstetige Abbildung von $L^p(G)$ in $L^q(G)$. Außerdem erhalten wir für alle $u \in L^p(G)$ und $x \in G$:

$$|[\tilde{S}_0 u](x)| \leq \int_G |h_0(x,y)|\,|f_0(y,u(y))|\, dy$$
$$\leq \int_G M_0 [B_0 |u(y)|^p + 3|c_0(y)|]\, dy$$
$$= M_0 (B_0 \|u\|_p^p + 3\|c_0\|_1),$$

d.h.

$$\|\tilde{S}_0 u\|_q \leq M_0 |G|^{\frac{1}{q}} (B_0 \|u\|_p^p + 3\|c_0\|_1) \tag{8.19}$$

und

$$|[\tilde{S}_0 u](x)| \geq \int_G h_0(x,y) f_0(y,u(y))\, dy$$
$$\geq \int_G h_0(x,y)[b_0 |u(y)|^p - c_0(y)]\, dy$$

$$\geq m_o b_o \int_G |u(y)|^p \, dy - M_o \int_G |c_o(y)| \, dy$$

$$= m_o b_o \|u\|_p^p - M_o \|c_o\|_1,$$

d.h. es existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$, so daß für jedes $u \in L^p(G)$, $\|u\|_p \geq C$, die

$$\|\tilde{S}_o u\|_q \geq |G|^{\frac{1}{q}} (m_o b_o \|u\|_p^p - M_o \|c_o\|_1) \tag{8.20}$$

ist.

Zum Operator S_o: Aus der Vollstetigkeit der Abbildungen $\tilde{S}_o$ von $L^p(G)$ in $L^q(G)$ und g von $L^p(G)$ in $\mathbb{R}$ ergibt sich sofort die Vollstetigkeit von $S_o = g \cdot \tilde{S}_o : L^p(G) \to L^q(G)$. Überdies gewinnen wir aus (8.19) für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $u \in L^p(G)$, $\|u\|_p = t_n$, die Abschätzung

$$\frac{\|S_o u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} = \frac{|g(u)| \|\tilde{S}_o u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}}$$

$$\leq \frac{|g(u)| M_o |G|^{\frac{1}{q}} (B_o \|u\|_p^p + 3\|c_o\|_1)}{\|u\|_p^{p-1}}$$

$$= M_o |G|^{\frac{1}{q}} (B_o |g(u) t_n| + 3\|c_o\|_1 \frac{|g(u)|}{t_n^{p-1}})$$

$$\leq M_o |G|^{\frac{1}{q}} (B_o + 3\frac{\|c_o\|_1}{t_n^p}) (|g(u) t_n - M| + |M|)$$

$$\leq M_o |G|^{\frac{1}{q}} (B_o + 3\frac{\|c_o\|_1}{t_n^p}) \Big(\sup_{\|u\|_p = t_n}^{L^p(G)} |g(u) t_n - M| + |M| \Big) \to M_o |G|^{\frac{1}{q}} B_o |M|$$

für $n \to \infty$ nach (8.17) und (8.18). Zusammen mit der Monotonie der Folge (t_n) bekommen wir also die Existenz eines $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $u \in A$, $\|u\|_p > t_{n_o}$, gilt:

$$\|S_o u\|_q \leq (M_o |G|^{\frac{1}{q}} B_o |M| + 1) \|u\|_p^{p-1},$$

d.h. $S_o \in Q(p-1,A,L^q(G))$. Ganz entsprechend wird mit (8.20) für jedes $n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq C$ und alle $u \in L^p(G)$, $\|u\|_p = t_n$, die

$$\frac{\|S_o u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}} = \frac{|g(u)| \|\tilde{S}_o u\|_q}{\|u\|_p^{p-1}}$$

$$\geq \frac{|g(u)| |G|^{\frac{1}{q}} (m_o b_o \|u\|_p^p - M_o \|c_o\|_1)}{\|u\|_p^{p-1}}$$

$$= |G|^{\frac{1}{q}} (m_o b_o |g(u) t_n| - M_o \|c_o\|_1 \frac{|g(u)|}{t_n^{p-1}})$$

$$\geq |G|^{\frac{1}{q}} [m_o b_o (|M| - |g(u)t_n - M|) - M_o \frac{\|c_o\|_1}{t_n^p} \cdot$$

$$\cdot (|M| + |g(u)t_n - M|)]$$

$$\geq |G|^{\frac{1}{q}} [m_o b_o |M| - M_o |M| \frac{\|c_o\|_1}{t_n^p} - (m_o b_o +$$

$$+ M_o \frac{\|c_o\|_1}{t_n^p}) (^{L^p(G)\text{-sup}}_{\|u\|_p = t_n} |g(u)t_n - M|)]$$

$$\to |G|^{\frac{1}{q}} m_o b_o |M|$$

für $n \to \infty$ nach (8.17) und (8.18). Ist somit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, dann gibt es zusammen mit der Monotonie der Folge (t_n) ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $u \in A$, $\|u\|_p > t_{n_1} \geq C$, die

$$\|S_o u\|_q \geq (|G|^{\frac{1}{q}} m_o b_o |M| - \varepsilon) \|u\|_p^{p-1}$$

und folglich

$$d(p-1,A,L^q(G))(S_o) \geq m_o b_o |M| |G|^{\frac{1}{q}} > 0 \tag{8.21}$$

ist.

Zum Operator S_1: Unter den gemachten Voraussetzungen ist S_1 nach Lemma[6.5], [77], S.59, eine vollstetige Abbildung von $L^p(G)$ in $L^q(G)$ und für alle $u \in L^p(G)$ die

$$\|S_1 u\|_q \leq \|h\|_r |G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} (\|c\|_q + b\|u\|_p^{p-1}).$$

Demnach ist aber $S_1 \in Q(p-1,A,L^q(G))$ mit

$$(8.22) \qquad q(p-1,A,L^q(G))(S_1) \leq b\|h\|_r |G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}.$$

Zum Operator S: Die Ergebnisse für S_0 und S_1 zusammenfassend erhalten wir die Vollstetigkeit von $S=S_0+S_1: L^p(G) \to L^q(G)$. Darüber hinaus ist $S \in Q(p-1,A,L^q(G))$, und wegen (8.21), (8.22) und (8.15) wird

$$\begin{aligned} d(p-1,A,L^q(G))(S) &= d(p-1,A,L^q(G))(S_0+S_1) \\ &\geq d(p-1,A,L^q(G))(S_0) - \\ &\qquad - q(p-1,A,L^q(G))(S_1) \\ &\geq m_0 b_0 |M| |G|^{\frac{1}{q}} - b\|h\|_r |G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} > 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun die Behauptung nach Satz 7.9, da sich aus $T \in Q(p-1,L^p(G),L^q(G))$ mit $d(p-1,L^p(G),L^q(G))(T)>0$ noch $T \in Q(p-1,A,L^q(G))$ mit $d(p-1,A,L^q(G))(T)>0$ ergibt.

q.e.d.

Gilt in Satz 8.6 für den Kern $k: G\times G\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Ungleichung der Form

$$|k(x,y,u)| \leq |h(x,y)|(|c(y)|+b|u|^{p-1-\varepsilon}) \qquad ((x,y,u) \in G\times G\times\mathbb{R})$$

mit einem $\varepsilon \in (0,p-1]$, dann existiert offenbar zu jedem $\tilde{b} \in \mathbb{R}^+$ ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $(x,y,u) \in G\times G\times\mathbb{R}$ der

$$|k(x,y,u)| \leq |h(x,y)|(|c(y)|+\tilde{c}+\tilde{b}|u|^{p-1})$$

ist. Die Ungleichung (8.15) läßt sich daher in diesem Fall für jedes $M \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ erfüllen.

Als Anwendung von Satz 8.6 geben wir abschließend noch das

Beispiel 8.7.

Es sei $G \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) kompakt, $|G|>0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $h_0: G\times G \to \mathbb{R}$ stetig und

$$\forall (x,y)\in G\times G:\quad h_0(x,y) > 0,$$

$k: G\times G\times \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists b\in\mathbb{R}^+ \exists c\in L^{\frac{2n}{2n-1}}(G) \exists h\in L^{2n}(G\times G) \forall (x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:$$
$$|k(x,y,u)| \le |h(x,y)|\,(|c(y)|+b|u|^{2n-1}).$$

Ferner sei $l: \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\liminf_{t\to\infty} |l(t)t| < \limsup_{t\to\infty} |l(t)t| = \infty. \tag{8.23}$$

Dann folgt:

Die Gleichung

$$\lambda u^{2n-1}(x) - \int_G [l(\|u\|_{2n})h_0(x,y)(|y|^2+1)u^{2n}(y) + k(x,y,u(y))]\,dy = 0$$

besitzt einen positiven und einen negativen asymptotischen Verzweigungspunkt bez. $L^{2n}(G)$.

Beweis: (Mit Satz 8.6 und Beispiel 8.2.)

Wir setzen $p:=2n>1$, $q:=s:=\frac{2n}{2n-1}>1$ und $r:=\max\{p,q\}=2n$. Damit wird $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ und $\frac{1}{s}-\frac{1}{r}=\frac{n-1}{n}$. Weiter ist h_0 als stetige Funktion auf dem Kompaktum $G\times G$ beschränkt, meßbar und sogar gleichmäßig stetig. Insbesondere gibt es zusammen mit $h_0>0$ auf $G\times G$ Konstanten $m_0, M_0\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $(x,y)\in G\times G$

$$m_0 \le h_0(x,y) \le M_0$$

ist. Außerdem definieren wir eine Funktion $f_0: G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f_0(x,u) := (|x|^2+1)u^{2n} \quad ((x,u)\in G\times\mathbb{R}).$$

Dann genügt f_0 offensichtlich der CB, und es wird

$$|u|^{2n} \le f_0(x,u) \le (\sup_{x\in G}|x|^2+1)u^{2n}$$

für alle $(x,u)\in G\times\mathbb{R}$. Folglich erklären wir für Satz 8.6 noch $b_0, B_0\in\mathbb{R}^+$ und $c_0\in L^1(G)$ durch

$$b_0 := 1, \quad c_0 := 0 \quad \text{und} \quad B_0 := \sup_{x\in G}|x|^2+1 < \infty.$$

Überdies wird vermöge

$$g(u) := l(\|u\|_{2n}) \quad (u\in L^{2n}(G))$$

eine vollstetige Abbildung $g: L^{2n}(G) \to \mathbb{R}$ festgelegt, da ja die Funktion $l: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ als stetig vorausgesetzt ist. Setzen wir ferner

$$\tilde{M} := \liminf_{t \to \infty} |l(t)t|,$$

so wird nach (8.23) $\tilde{M} < \infty$, und es gibt eine Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ mit

(8.24) $$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$$

und

(8.25) $$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |l(t_n)t_n| \leq \tilde{M} + 1.$$

Ebenso können wir wegen

$$\limsup_{t \to \infty} |l(t)t| = \infty$$

eine weitere Folge $(s_n) \subset \mathbb{R}^+$ mit

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$$

auswählen, so daß gilt:

$$\lim_{n \to \infty} l(s_n)s_n = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n \to \infty} l(s_n)s_n = -\infty.$$

Betrachten wir nun zunächst den Fall $l(s_n)s_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Hierfür existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}^+$ mit

(8.26) $$\tilde{M} + 1 < |M|$$

und

$$b\|h\|_{2n}|G|^{\frac{n-1}{n}} < m_o b_o |M| |G|^{\frac{2n-1}{2n}}.$$

O.B.d.A. können wir dabei auch

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad l(s_n)s_n > M \quad \text{und} \quad t_n < s_n$$

annehmen. Zusammen mit (8.25) und (8.26) haben wir also erhalten:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad l(t_n)t_n \leq \tilde{M} + 1 < M < l(s_n)s_n \quad \text{und} \quad t_n < s_n.$$

Nach dem Zwischenwertsatz und wegen (8.24) gibt es demnach für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in (t_n, s_n)$ mit

$$l(\xi_n)\xi_n = M \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \xi_n = \infty.$$

Folglich ist der

$$\mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty} \inf \left(\sup_{\|u\|_{2n}=t}^{L^{2n}(G)} |g(u)t-M| \right) =$$

$$\mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty} \inf |l(t)t-M| = 0.$$

Ganz entsprechend existiert im Fall $l(s_n)s_n \to -\infty$ für $n\to\infty$ eine Konstante $M\in\mathbb{R}^-$ mit

$$\tilde{M} + 1 < |M|$$

und

$$b\|h\|_{2n}|G|^{\frac{n-1}{n}} < m_o b_o |M| |G|^{\frac{2n-1}{2n}}$$

sowie

$$\mathbb{R}^+\text{-}\lim_{t\to\infty} \inf \left(\sup_{\|u\|_{2n}=t}^{L^{2n}(G)} |g(u)t-M| \right) = 0.$$

Jedesmal können wir daher die Bedingungen (8.15) und (8.16) von Satz 8.6 erfüllen.

Schließlich hat auch der durch

$$[Tu](x) := u^{2n-1}(x) \quad (u\in L^{2n}(G),\ x\in G)$$

definierte Operator $T:L^{2n}(G)\to L^{\frac{2n}{2n-1}}(G)$ nach Beispiel 8.2 alle gewünschten Eigenschaften, so daß wir insgesamt mit Satz 8.6 auf die Behauptung schließen können.

q.e.d.

Kapitel 2: Lokale Surjektivität und Verzweigungspunkte

In unserem zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, inwieweit bestimmte lokale Eigenschaften von Operatoren der Form $\lambda T-S$, die eine gewisse Teilmenge Δ eines reellen normierten Raumes X in einen reellen normierten Raum Y bzw. in den zu X dualen Raum X^* abbilden, abhängig sind von dem dabei auftretenden reellen Parameter λ. Vor allem verstehen wir hierunter die Herleitung lokaler Surjektivitätssätze vom FREDHOLM Typ sowie den Nachweis der Existenz von Verzweigungspunkten des Paares (T,S). Wie sich nun zeigen wird, besteht zwischen diesen Ergebnissen und denen des ersten Kapitels eine fast vollkommene formale Analogie. Um dies zu unterstreichen, werden wir im folgenden bemüht sein, die Darstellung der globalen Theorie möglichst umfassend auf den lokalen Fall zu übertragen.

§ 9. φ-LOKAL BESCHRÄNKTE ABBILDUNGEN

Im ganzen Abschnitt seien X und Y reelle normierte Räume, $A \subset X$, $p \in X$ mit $p \in A \cap \overline{A \setminus \{p\}}$, $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter die durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ definierte Funktion $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ verstanden werden.

Im zweiten Paragraphen haben wir die φ-asymptotisch beschränkten Abbildungen eingeführt. Diese zeichneten sich - grob gesprochen - dadurch aus, daß ihr Verhalten für gewisse $x \in X$ mit hinreichend großer Norm bestimmten Anforderungen genügte. Entsprechend werden wir hier eine Abbildung $f: A \to Y$ "φ-lokal beschränkt im Punkte p bez. A" nennen, wenn die Bilder f(x) für alle $x \in A$, welche genügend nahe bei p liegen, noch näher zu erläuternde Bedingungen erfüllen. Dabei läßt sich der allgemeine Fall eines beliebigen Punktes $p \in X$ nützlicherweise auf den Fall p=0 zurückführen.

Definition 9.1.

(a) Eine Abbildung $f: A \to Y$ heißt genau dann *φ-lokal beschränkt in p bez. A*, wenn gilt:

$$\exists b \in \mathbb{R}^+ \exists c \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in A, \|x-p\| \leq b: \ \|f(x)-f(p)\| \leq c \cdot \varphi(\|x-p\|).$$

(b) $Q(\varphi,p,A,Y) := \{f: A \to Y \mid f \text{ ist } \varphi\text{-lokal beschränkt in p bez. A}\}$.

(c) Für p=0 setzen wir $Q_0(\varphi,A,Y) := \{f \in Q(\varphi,0,A,Y) \mid f(0)=0\}$.

Lemma 9.2.

(a) $Q(\varphi,p,A,Y)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) $Q_0(\varphi,A,Y)$ ist ein Unterraum von $Q(\varphi,0,A,Y)$.

Beweis:

Klar.

q.e.d.

Analog zur Definition 2.3 erklären wir jetzt Funktionen $q(\varphi,p,A,Y): Q(\varphi,p,A,Y) \to \mathbb{R}_0^+$ bzw. $q_0(\varphi,A,Y): Q_0(\varphi,A,Y) \to \mathbb{R}_0^+$ und zeigen

im Anschluß daran, weshalb es für unsere Belange völlig ausreicht, in Zukunft lediglich die Räume $Q_0(\varphi,A,Y)$ weiter zu untersuchen.

Definition 9.3.

(a) Die Funktion $q(\varphi,p,A,Y):Q(\varphi,p,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall f\in Q(\varphi,p,A,Y):\quad q(\varphi,p,A,Y)(f) := \inf\{c\in\mathbb{R}_0^+ \mid \exists b\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x-p\|\leq b:\ \|f(x)-f(p)\| \leq c\cdot\varphi(\|x-p\|)\}.$$

(b) Die Funktion $q_0(\varphi,A,Y):Q_0(\varphi,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall f\in Q_0(\varphi,A,Y):\quad q_0(\varphi,A,Y)(f) := q(\varphi,0,A,Y)(f) = \inf\{c\in\mathbb{R}_0^+ \mid \exists b\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\leq b:\ \|f(x)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)\}.$$

Lemma 9.4.

Es sei $f:A\to Y$ und $f_p:A-p\to Y$ definiert durch

$$\forall x\in A-p:\quad f_p(x) := f(x+p)-f(p).$$

Dann folgt:

(a) $f\in Q(\varphi,p,A,Y) \quad\Leftrightarrow\quad f_p\in Q_0(\varphi,A-p,Y).$

(b) $f\in Q(\varphi,p,A,Y) \quad\Rightarrow\quad q(\varphi,p,A,Y)(f) = q_0(\varphi,A-p,Y)(f_p).$

Beweis:

Zunächst ist mit $p\in A\cap\overline{A\setminus\{p\}}$ auch $0\in(A-p)\cap\overline{(A-p)\setminus\{0\}}$ und daher der Raum $Q_0(\varphi,A-p,Y)$ wohldefiniert. Weiter ergibt sich für beliebige, aber fest gewählte $b\in\mathbb{R}^+$ und $c\in\mathbb{R}_0^+$:

$$[\forall x\in A, \|x-p\|\leq b:\ \|f(x)-f(p)\| \leq c\cdot\varphi(\|x-p\|)] \quad\Leftrightarrow$$
$$[\forall x\in A-p, \|x\|\leq b:\ \|f(x+p)-f(p)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)] \quad\Leftrightarrow$$
$$[\forall x\in A-p, \|x\|\leq b:\ \|f_p(x)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)].$$

Zusammen mit $f_p(0)=0$ erhalten wir nun hieraus unmittelbar die beiden Behauptungen.

q.e.d.

Nach Lemma 9.4 können und werden wir im folgenden o.B.d.A. ausschließlich solche Abbildungen $f:A\to Y$ betrachten, welche φ-lokal beschränkt in Null bez. A sind und für die $f(0)=0$ gilt. Also sei jetzt für den Rest dieses Abschnitts A eine

Teilmenge von X mit $0 \in A \cap \overline{A \setminus \{0\}}$ und außerdem γ eine positive reelle Zahl sowie $\varphi(t)>0$ für t aus $(0,\gamma]$. Darüber hinaus schreiben wir fortan statt $Q_0(\varphi,A,Y)$ bzw. $q_0(\varphi,A,Y)$ auch kurz Q_0 bzw. q_0, falls keine Verwechslungen zu befürchten sind. Damit gilt das

Lemma 9.5.

(a) $f \in Q_0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b: \ \|f(x)\| \leq q_0(f) \cdot \varphi(\|x\|)$.

(b) q_0 ist eine Halbnorm auf Q_0.

(c) q_0 ist keine Norm auf Q_0.

Beweis:

Ad.(a): Wir belegen die Behauptung durch Angabe eines Beispiels und setzen hierzu $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Ist nun $c \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt, so wird für jedes $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq c$, der

$$|f(x)| = |x|^2 \leq c \cdot |x| = c \cdot \varphi(|x|),$$

d.h. $f \in Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$. Dagegen ist jedoch $f(x)>0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ad.(b): Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung. Dazu seien $f,g \in Q_0$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Definition der Funktion q_0 erhalten wir sofort:

$$\exists b_f \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b_f: \ \|f(x)\| \leq (q_0(f)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|)$$

und

$$\exists b_g \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b_g: \ \|g(x)\| \leq (q_0(g)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Zusammenfassend wird dann für alle $x \in A$, $\|x\| \leq b := \min\{b_f, b_g\} > 0$, die

$$\|(f+g)(x)\| \leq (q_0(f)+q_0(g)+2\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Dies bedeutet nun $q_0(f+g) \leq q_0(f)+q_0(g)$, denn $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ war ja beliebig.

Ad.(c): Es seien $x_0 \in A \setminus \{0\}$ und $y_0 \in Y \setminus \{0\}$ beliebige, aber fest gewählte Elemente und eine Abbildung $f: A \to Y$, $f \neq 0$, erklärt durch $f(x):=0$ für alle $x \in A \setminus \{x_0\}$ sowie $f(x_0):=y_0$. Wird jetzt weiter $b:=\frac{1}{2}\|x_0\|>0$, so ist $f(x)=0$ für jedes $x \in A$, $\|x\| \leq b$ und damit

auch $f \in Q_0$ mit $q_0(f)=0$. Folglich handelt es sich bei der Funktion q_0 nicht um eine Norm auf Q_0.

q.e.d.

Auch hier bekommen wir, vergleichbar mit Lemma 2.5, eine zweite Darstellung für die Halbnorm $q_0(f)$ einer Abbildung $f \in Q_0$.

Lemma 9.6.

$$\forall f \in Q_0: \quad q_0(f) = \operatorname{A-lim\,sup}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}.$$

Beweis:

Es sei $f \in Q_0$. Einerseits folgt dann nach Definition von $q_0(f)$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b: \ \|f(x)\| \leq (q_0(f)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|)$$

und somit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, 0<\|x\| \leq \min\{b,\gamma\}: \ \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq q_0(f)+\varepsilon,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+: \ c_0 := \operatorname{A-lim\,sup}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq q_0(f)+\varepsilon < \infty$$

und also $c_0 \leq q_0(f)$. Um nun andererseits noch $q_0(f) \leq c_0$ zu beweisen, zeigen wir:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists b \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b: \ \|f(x)\| \leq (c_0+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|).$$

Nehmen wir hierfür an,

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A, \|x\| \leq b: \ \|f(x)\| > (c_0+\varepsilon_0) \cdot \varphi(\|x\|),$$

so ergibt sich zusammen mit $f(0)=0$ die Existenz einer Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die

$$\|f(x_n)\| > (c_0+\varepsilon_0) \cdot \varphi(\|x_n\|).$$

O.B.d.A. kann dabei noch die $\|x_n\| \leq \gamma$ $(n \in \mathbb{N})$ vorausgesetzt werden. Damit erhalten wir

$$c_0 = \operatorname{A-lim\,sup}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{\|f(x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} \geq c_0+\varepsilon_0 > c_0$$

und demnach einen Widerspruch.

q.e.d.

Zwischen den Räumen Q und B bestehen, wie wir bereits früher

gesehen haben, gewisse Zusammenhänge (vgl. § 2). So ist es nicht weiter überraschend, daß wir im folgenden ähnliches für die Räume Q_0 und B_0 feststellen werden. Letztere waren - hieran sei noch einmal kurz erinnert - definiert vermöge

$$B_0 := B_0(\varphi,A,Y) := \{f:A\to Y \mid f(0)=0 \text{ und } \exists c\in\mathbb{R}_0^+ \forall x\in A: \|f(x)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)\}$$

(vgl. Definition 1.1). Außerdem besitzt die Funktion $\|\cdot\|_B := \|\cdot\|_{B(\varphi,A,Y)}: B_0\to\mathbb{R}_0^+$ erklärt durch

$$\forall f\in B_0: \|f\|_B := \inf\{c\in\mathbb{R}_0^+ \mid \forall x\in A: \|f(x)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)\}$$

alle Eigenschaften einer Norm, d.h. der Raum $(B_0,\|\cdot\|_B)$ ist ein normierter Raum und überdies sogar vollständig, wenn auch Y ein BANACH-Raum ist (vgl. Lemma 1.4(b),(c) und Lemma 1.5(b)).

Lemma 9.7.

(a) B_0 ist ein Unterraum von Q_0 (algebraisch).

(b) $\forall f\in B_0: \; q_0(f) \leq \|f\|_B$.

(c) $f\in Q_0 \;\Rightarrow\; f\in B_0$.

(d) $f\in B_0 \;\Rightarrow\; q_0(f) \geq \|f\|_B$.

Beweis:

Die Teile (a) und (b) sind klar!

Ad.(c): Wir beweisen die Behauptung durch Angabe eines Beispiels und setzen hierzu $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $f(x):=x^2$ für $x\in\mathbb{R}$. Einerseits ist dann (vgl. Beweis von Lemma 9.5(a)) $f\in Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$, während es andererseits offenbar keine Konstante $c\in\mathbb{R}_0^+$ gibt mit

$$\forall x\in\mathbb{R}: |f(x)| = |x|^2 \leq c\cdot|x| = c\cdot\varphi(|x|),$$

d.h. $f\notin B_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ad.(d): Wählen wir hier $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und

$$\forall x\in\mathbb{R}: f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x|\leq 1, \\ x & \text{für } |x|>1, \end{cases}$$

so liefert dieses Beispiel die Behauptung, denn es wird jetzt

$$\forall x\in\mathbb{R}: |f(x)| \leq |x| = 1\cdot\varphi(|x|)$$

und

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \frac{1}{2}: \; |f(x)| = 0 \leq 0 \cdot \varphi(|x|).$$

Damit ist jedoch einerseits $f \in B_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(f)=0$, während andererseits wegen $f \neq 0$ die $\|f\|_{B(1,\mathbb{R},\mathbb{R})} > 0$ ist.

q.e.d.

Für eine beliebige Abbildung f aus einem beliebigen Raum $B_0(\varphi,A,Y)$ stimmen nach Lemma 9.7 die Halbnorm $q_0(\varphi,A,Y)(f)$ von f und die Norm $\|f\|_{B(\varphi,A,Y)}$ von f nicht notwendigerweise überein. Allerdings gibt es unter Umständen in $B_0(a,A,Y)$ gewisse Elemente, auf welche dies zutrifft. Genauer gilt das

Beispiel 9.8.

Es sei $f:A \to Y$ und

$$\forall x \in A \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists t \in (0,r]: \; tx \in A \text{ und } f(tx) = t^a f(x).$$

Dann folgt:

(a) $f \in Q_0(a,A,Y) \Rightarrow q_0(a,A,Y)(f) = \underset{x \neq 0}{A\text{-sup}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}$.

(b) $f \in B_0(a,A,Y) \Rightarrow f \in Q_0(a,A,Y)$ und $q_0(a,A,Y)(f) = \|f\|_{B(a,A,Y)}$.

Beweis:

Ad.(a): Es sei $f:A \to Y$ von der angegebenen Art und aus $Q_0(a,A,Y)$. Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Insbesondere gibt es also ein $b \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $x \in A$, $0 < \|x\| \leq b$, die

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} \leq q_0(a,A,Y)(f) + \varepsilon$$

wird. Bezeichnet weiter für jedes $x \in A \setminus \{0\}$ t_x eine nach Voraussetzung existierende positive reelle Zahl mit

$$t_x x \in A, \; 0 < \|t_x x\| \leq b \text{ und } f(t_x x) = t_x^a f(x),$$

so erhalten wir:

$$\forall x \in A \setminus \{0\}: \; \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} = \frac{t_x^a \|f(x)\|}{t_x^a \|x\|^a} = \frac{\|f(t_x x)\|}{\|t_x x\|^a} \leq q_0(a,A,Y)(f) + \varepsilon,$$

d.h.

$$c_0 := \overset{A\text{-}\sup}{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a} \leq q_0(a,A,Y)(f)+\varepsilon < \infty \quad .$$

und schließlich $c_0 \leq q_0(a,A,Y)(f)$, denn $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ war ja beliebig. Außerdem ist wegen $f(0)=0$ trivialerweise $q_0(a,A,Y)(f) \leq c_0$.

Ad.(b): Nach Lemma 9.7(a) ist $B_0(a,A,Y)$ ein Unterraum von $Q_0(a,A,Y)$. Die Behauptung ergibt sich dann aus Teil (a) zusammen mit Lemma 1.6.

q.e.d.

Auf jedem Vektorraum Q_0 steht uns nach Lemma 9.5(b) mit der Funktion $q_0: Q_0 \to \mathbb{R}_0^+$ eine Halbnorm zur Verfügung. Wie wir in den weiteren Abschnitten noch sehen werden, ist es im folgenden - den Gegebenheiten des ersten Kapitels entsprechend - nicht notwendig, zwischen zwei Abbildungen $f,g \in Q_0$ mit $q_0(f-g)=0$ zu unterscheiden. Demnach untersuchen wir zunächst die Menge aller Abbildungen $f \in Q_0$ mit $q_0(f)=0$ bzw. Paare $f,g \in Q_0$ mit $q_0(f-g)=0$, um dann gleichfalls vom Raum (Q_0,q_0) in natürlicher Weise zu einem normierten Raum überzugehen.

Definition 9.9.

(a) $N_0(\varphi,A,Y) := \{f \in Q_0(\varphi,A,Y) \mid q_0(\varphi,A,Y)(f)=0\}$.

(b) Es seien $f,g \in Q_0(\varphi,A,Y)$. f heißt genau dann *φ-lokal äquivalent zu g in Null bez. A*, i.Z. $f \mathbin{\&} g$, wenn gilt:

$$f-g \in N_0(\varphi,A,Y).$$

Ferner vereinbaren wir, von Fall zu Fall statt $N_0(\varphi,A,Y)$ kurz N_0 zu schreiben. Damit erhalten wir sofort das

Lemma 9.10.

(a) N_0 ist ein Unterraum von Q_0.

(b) $\&$ ist eine Äquivalenzrelation auf Q_0.

Beweis:

Ad.(a): Gilt, da q_0 eine Halbnorm auf Q_0 ist.

Ad.(b): Direkte Folge von Teil (a) (vgl. [32], S.212).

q.e.d.

Eine einfache Charakterisierung der Elemente von N_0 geben wir noch mit

Lemma 9.11.

Es sei $f:A\to Y$. Dann folgt:

$$f\in N_0(\varphi,A,Y) \Leftrightarrow [f(0)=0 \text{ und } \overset{A\text{-}\lim}{x\to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0].$$

Beweis:

Für jede Abbildung $f:A\to Y$ gilt:

$$[f(0)=0 \text{ und } \overset{A\text{-}\lim}{x\to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0] \Leftrightarrow$$
$$[f(0)=0 \text{ und } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists r\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, 0<\|x\|\leq r: \|f(x)\| \leq \varepsilon\cdot\varphi(\|x\|)] \Leftrightarrow$$
$$[f\in Q_0(\varphi,A,Y) \text{ mit } q_0(\varphi,A,Y)(f)=0].$$

q.e.d.

Wie man Lemma 9.11 entnimmt, überträgt sich die für lokale Aussagen unbefriedigende Eigenschaft der Räume B_0 aus Beispiel 1.7(e) nicht auf die Räume Q_0.

Beispiel 9.12.

(a) Es sei der $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$, $f\in Q_0(\varphi,A,Y)$ und $0\notin\overline{f(A)\setminus\{0\}}$. Dann folgt:

$f\in N_0(\varphi,A,Y)$.

(b) Es sei f eine Abbildung von $D(f)\subset X$ in Y und $0\in Kern(f)\cap$ $\cap\overline{Kern(f)\setminus\{0\}}$. Dann folgt:

$f\in N_0(\varphi,Kern(f),Y)$.

(c) Es sei A symmetrisch, und für jedes $h:A\to Y$ sei die Abbildung $h^-:A\to Y$ definiert durch

$$\forall x\in A: \quad h^-(x) := -h(-x).$$

Dann folgt für alle $f\in Q_0(\varphi,A,Y)$:

(i) $f^-\in Q_0(\varphi,A,Y)$.

(ii) $f\& f^- \Leftrightarrow \exists g\in Q_0(\varphi,A,Y)$, g ungerade: $f\& g$.

(d) Es seien $f,g\in Q_0(a,A,Y)$ und

$$\forall x\in A\,\forall r\in\mathbb{R}^+\,\exists t\in(0,r]:\quad tx\in A,\ f(tx)=t^a f(x) \text{ und } g(tx)=t^a g(x).$$

Dann folgt:

$$f\,\&\,g \;\Leftrightarrow\; f=g.$$

Beweis:

Ad.(a): Ist $f\in Q_0(\varphi,A,Y)$ und $0\notin\overline{f(A)\setminus\{0\}}$, so erhalten wir

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\,\exists c\in\mathbb{R}_0^+\,\forall x\in A,\|x\|\le b:\ \|f(x)\|\le c\cdot\varphi(\|x\|)$$

und

$$\exists\varepsilon_0\in\mathbb{R}^+\,\forall y\in f(A)\setminus\{0\}:\ \|y\|\ge\varepsilon_0.$$

Zusammen mit $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=0$ ergibt sich demnach

$$\exists\tilde{b}\in\mathbb{R}^+\,\forall x\in A,0<\|x\|\le\min\{b,\tilde{b}\}:\ \|f(x)\|\le c\cdot\varphi(\|x\|)<\varepsilon_0$$

sowie

$$\forall x\in A:\ f(x)=0 \quad\text{oder}\quad \|f(x)\|\ge\varepsilon_0.$$

Folglich ist $f(x)=0$ für alle $x\in A$ mit $\|x\|\le\min\{b,\tilde{b}\}\in\mathbb{R}^+$, denn $f(0)=0$. Dies bedeutet aber $f\in N_0(\varphi,A,Y)$.

Ad.(b): Klar.

Ad.(c) (vgl. Beweis von Beispiel 2.11(c)): Es sei A symmetrisch und $f\in Q_0(\varphi,A,Y)$. Offenbar ist dann auch $f(-\cdot)\in Q_0(\varphi,A,Y)$ mit $q_0(\varphi,A,Y)(f)=q_0(\varphi,A,Y)(f(-\cdot))$ und daher $f^-\in Q_0(\varphi,A,Y)$. Ist nun einerseits $f\,\&\,f^-$, so definieren wir $g:A\to Y$ durch $g:=\frac{1}{2}(f+f^-)$. Also ist g ungerade, Element von $Q_0(\varphi,A,Y)$ und außerdem φ-lokal äquivalent zu f in Null bez. A. Gibt es andererseits eine ungerade Abbildung $g\in Q_0(\varphi,A,Y)$, $f\,\&\,g$, dann wird wegen

$$f-f^- = f+f(-\cdot) = (f-g)+(f(-\cdot)-g(-\cdot))$$

überdies $q_0(\varphi,A,Y)(f-f^-)=0$, d.h. $f\,\&\,f^-$.

Ad.(d): Für $f=g$ ist trivialerweise $f\,\&\,g$. Umgekehrt erhalten wir unter den gemachten Voraussetzungen aus $f\,\&\,g$ nach Beispiel 9.8 (a) zusammen mit $f(0)=g(0)=0$ sofort $f=g$.

q.e.d.

Ist $U\subset X$ eine Obermenge von A, so zeigt Beispiel 9.12(b) vor allem, daß für Abbildungen $f,g:U\to Y$ mit $f,g\in Q_0(\varphi,A,Y)$ und $f\,\&\,g$

die Differenz $f-g:U\to Y$ nicht notwendigerweise "stark nichtlinear" ist:

Betrachten wir etwa $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erklärt durch

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x):=x$$

sowie

$$g(0):=0 \text{ und } \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ g(x):=x-\sqrt{|x|}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x}\right),$$

dann können wir $A:=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}:\ x=\frac{1}{k\pi}\}\cup\{0\}$ setzen und erhalten sofort:

$$f,g\in Q_0(1,A,\mathbb{R}) \text{ mit } q_0(1,A,\mathbb{R})(f-g)=0.$$

Für die Differenz $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ergibt sich aber

$$(f-g)(0)=0 \text{ sowie } \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ (f-g)(x)=\sqrt{|x|}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

und somit eine "schwach nichtlineare" Abbildung.

Insbesondere dieser Sachverhalt stellt die Bedeutung der Menge A bei Einführung der Räume $Q_0(\varphi,A,Y)$ heraus.

Das nächste Beispiel gibt an, wie sich FRÉCHET-differenzierbare Operatoren in die Theorie der φ-lokal beschränkten Abbildungen einordnen lassen.

Beispiel 9.13.

Es sei $U\subset X$ offen und $0\in U$. Dazu sei die Abbildung $f:U\to Y$ FRÉCHET-differenzierbar in Null mit der Ableitung f_0, und es gelte $f(0)=0$, d.h. es ist $f_0\in L(X,Y)$ und der

$$\text{(9.1)}\qquad \operatorname*{U-lim}_{x\to 0}\frac{\|f(x)-f_0(x)\|}{\|x\|}=0.$$

Dann folgt:

$f_0\in B_0(1,U,Y)$, $f\in Q_0(1,U,Y)$, $f\&f_0$ und $\|f_0\|_{L(X,Y)}=\|f_0\|_{B(1,U,Y)}=q_0(1,U,Y)(f_0)=q_0(1,U,Y)(f)$.

Beweis:

Nach den Beispielen 1.7(b) und 9.8(b) ist $f_0\in B_0(1,U,Y)\cap Q_0(1,U,Y)$ mit $\|f_0\|_{L(X,Y)}=\|f_0\|_{B(1,U,Y)}=q_0(1,U,Y)(f_0)$. Ferner gibt es wegen (9.1) und $f(0)=0=f_0(0)$ zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ein $r\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $x\in U$ mit $\|x\|\leq r$ gilt:

(9.2) $\quad \|f(x)\| - \|f_0(x)\| \leq \|f(x)-f_0(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$

und weiter

(9.3) $\quad \|f(x)\| \leq (\varepsilon + \|f_0\|_{L(X,Y)}) \cdot \|x\|$.

Nach (9.3) ist also $f \in Q_0(1,U,Y)$, während aus (9.2) überdies $q_0(1,U,Y)(f-f_0)=0$ und somit auch $q_0(1,U,Y)(f_0)=q_0(1,U,Y)(f)$ folgt.

q.e.d.

Umgekehrt ist aber natürlich nicht jedes $f \in Q_0(1,U,Y)$ ($U \subset X$ offen, $0 \in U$) notwendigerweise in Null FRÉCHET-differenzierbar, wie die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) zeigt. Bei unseren späteren Betrachtungen können wir daher auf Abbildungen zurückgreifen, die im Nullpunkt keine FRÉCHET-Ableitung besitzen.

Die von $f \in Q_0(\varphi,A,Y)$ erzeugte Äquivalenzklasse bezeichnen wir nun wieder mit $\hat{f}$, d.h.

$$\hat{f} := \{g \in Q_0(\varphi,A,Y) \mid f \& g\}$$

und führen analog zum ersten Kapitel den Quotientenraum $Q_0(\varphi,A,Y)/N_0(\varphi,A,Y)$ von $Q_0(\varphi,A,Y)$ nach dem Unterraum $N_0(\varphi,A,Y)$ ein. Ferner sei

$$\omega_0 := \omega_0(\varphi,A,Y): Q_0(\varphi,A,Y) \to Q_0(\varphi,A,Y)/N_0(\varphi,A,Y)$$

die natürliche Abbildung von $Q_0(\varphi,A,Y)$ auf $Q_0(\varphi,A,Y)/N_0(\varphi,A,Y)$ und somit

$$\omega_0(f) = \hat{f}$$

für jedes $f \in Q_0(\varphi,A,Y)$. Offensichtlich ist ω_0 linear, surjektiv und der $\mathrm{Kern}(\omega_0)=N_0(\varphi,A,Y)$. (Ist speziell für ein gewisses r aus $\mathbb{R}^+$ und alle $t \in [0,r]$ $tA \subset A$, so entnimmt man noch Beispiel 9.12(d), daß es für alle $f \in Q_0(a,A,Y)$ in der von f erzeugten Äquivalenzklasse $\hat{f}$ höchstens eine Abbildung $g: A \to Y$ mit $g(tx) = t^a g(x)$ für alle $(t,x) \in [0,r] \times A$ gibt.)

Auf dem Raum $Q_0(\varphi,A,Y)/N_0(\varphi,A,Y)$ werden wir jetzt in naheliegender Weise eine Norm erklären.

Definition 9.14.

(a) $QN_0(\varphi,A,Y) := Q_0(\varphi,A,Y)/N_0(\varphi,A,Y)$.

(b) Die Funktion $\|\cdot\|_{QN_0(\varphi,A,Y)}:QN_0(\varphi,A,Y)\to\mathbb{R}_0^+$ definieren wir durch

$$\forall \hat{f}\in QN_0(\varphi,A,Y):\quad \|\hat{f}\|_{QN_0(\varphi,A,Y)} := q_0(\varphi,A,Y)(f).$$

Die Funktion $\|\cdot\|_{QN_0(\varphi,A,Y)}$ ist offenbar wohldefiniert, da für alle $f_1,f_2\in Q_0(\varphi,A,Y)$ mit $f_1 \& f_2$ $q_0(\varphi,A,Y)(f_1)=q_0(\varphi,A,Y)(f_2)$ ist. Darüber hinaus wollen wir noch vereinbaren, im Einzelfall statt $QN_0(\varphi,A,Y)$ auch kürzer QN_0 zu schreiben.

Lemma 9.15.

$(QN_0,\|\cdot\|_{QN_0})$ ist ein normierter Raum.

Beweis:

Klar (vgl. Beweis von Lemma 2.14).

q.e.d.

Wie wir weiter sehen werden, zieht die Vollständigkeit des Raumes Y auch die des normierten Raumes $(QN_0,\|\cdot\|_{QN_0})$ nach sich. Der Vorbereitung hierzu dient das

Lemma 9.16.

$\forall f\in Q_0\,\exists (f_n)\subset B_0\,\forall n\in\mathbb{N}:\quad f_n \mathrel{\&} f$ und $\|f_n\|_B\to q_0(f)$.

Beweis:

Es sei $f\in Q_0$. Dann

$$\exists b\in\mathbb{R}^+\exists c\in\mathbb{R}_0^+\forall x\in A,\|x\|\leq b:\ \|f(x)\|\leq c\cdot\varphi(\|x\|).$$

Weiter wählen wir ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $1/n_0\leq b$ aus und definieren für jedes $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, eine Abbildung $f_n:A\to Y$ durch

$$\forall x\in A:\ f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } \|x\|\leq\frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wir zeigen: $\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0:\ f_n\in B_0\subset Q_0$. Dies folgt sofort aus

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in A, \|x\|\leq\tfrac{1}{n}\leq\tfrac{1}{n_0}\leq b:\ \|f_n(x)\| = \|f(x)\| \leq c\cdot\varphi(\|x\|)$$

und

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\forall x\in A, \|x\|>\tfrac{1}{n}:\ \|f_n(x)\| = 0 \leq c\cdot\varphi(\|x\|).$$

Wir zeigen: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0$: $f_n \mathrel{\&} f$. Die Behauptung ist unmittelbar klar, da für jedes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq n_0$ und alle $x\in A$ mit $\|x\|\leq\frac{1}{n}$ $f_n(x)=f(x)$ ist.

Wir zeigen: $\|f_n\|_B \to q_0(f)$. Sei dazu $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Hierfür

$$\exists\tilde{b}\in\mathbb{R}^+, \tilde{b}\leq\tfrac{1}{n_0}\forall x\in A, \|x\|\leq\tilde{b}:\ \|f(x)\| \leq (q_0(f)+\varepsilon)\cdot\varphi(\|x\|).$$

Wie oben schließt man hieraus auf

$$\forall n\in\mathbb{N}, \tfrac{1}{n}\leq\tilde{b}\leq\tfrac{1}{n_0}\forall x\in A:\ \|f_n(x)\| \leq (q_0(f)+\varepsilon)\cdot\varphi(\|x\|),$$

d.h.

$$(9.4)\qquad \forall n\in\mathbb{N}, \tfrac{1}{n}\leq\tilde{b}\leq\tfrac{1}{n_0}:\ \|f_n\|_B \leq q_0(f)+\varepsilon.$$

Andererseits erhalten wir nach Lemma 1.4(a)

$$\forall n\in\mathbb{N}, \tfrac{1}{n}\leq\tfrac{1}{n_0}\forall x\in A, \|x\|\leq\tfrac{1}{n}:$$
$$\|f(x)\| = \|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_B\cdot\varphi(\|x\|)$$

und demnach

$$(9.5)\qquad \forall n\in\mathbb{N}, \tfrac{1}{n}\leq\tfrac{1}{n_0}:\ q_0(f) \leq \|f_n\|_B.$$

Die Zusammenfassung von (9.4) und (9.5) ergibt also

$$\forall n\in\mathbb{N}, \tfrac{1}{n}\leq\tilde{b}\leq\tfrac{1}{n_0}:\ |\|f_n\|_B - q_0(f)| = \|f_n\|_B - q_0(f) \leq \varepsilon.$$

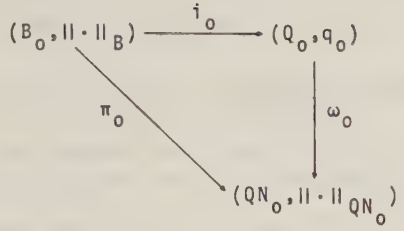
Dies bedeutet aber $\|f_n\|_B \to q_0(f)$, da ja $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ beliebig war.

q.e.d.

Abschließend sind wir nun in der Lage, die wesentlichsten Zusammenhänge zwischen den Räumen B_0, Q_0 und QN_0 zu formulieren. Dies geschieht mit

Lemma 9.17.

Für



mit

i_0 definiert durch $i_0(f) := f$ für jedes $f \in B_0$,
ω_0 definiert durch $\omega_0(f) := \hat{f}$ für jedes $f \in Q_0$ und
π_0 definiert durch $\pi_0 := \omega_0 \circ i_0$

folgt:

(a) $(B_0, \|\cdot\|_B)$ ist ein normierter Raum. Er ist sogar ein BANACH-Raum, falls Y ein BANACH-Raum ist.

(b) (Q_0, q_0) ist ein halbnormierter Raum.

(c) $(QN_0, \|\cdot\|_{QN_0})$ ist ein normierter Raum. Er ist sogar ein BANACH-Raum, falls Y ein BANACH-Raum ist.

(d) Die Abbildung i_0 ist linear, injektiv, und für jedes $f \in B_0$ ist $q_0(i_0(f)) \leq \|f\|_B$.

(e) Die Abbildung ω_0 ist linear, surjektiv, und für jedes $f \in Q_0$ ist die $\|\omega_0(f)\|_{QN_0} = q_0(f)$.

(f) Die Abbildung π_0 ist linear, surjektiv, und für jedes $f \in B_0$ ist die $\|\pi_0(f)\|_{QN_0} \leq \|f\|_B$.

Beweis:

Die Aussagen (a) und (b) sind bereits mit den Lemmata 1.4(b), 1.4(c), 1.5(b) und 9.5(b) bewiesen.

Ad.(d): Nach Lemma 9.7(a) ist die Abbildung i_0 wohldefiniert. Ferner sind Linearität und Injektivität von i_0 klar. Der Rest der Behauptung ergibt sich mit Lemma 9.7(b).

Ad.(e): Linearität und Surjektivität der Abbildung ω_0 sind wiederum klar. Weiter wird für alle $f \in Q_0$ noch die

$$\|\omega_0(f)\|_{QN_0} = \|\hat{f}\|_{QN_0} = q_0(f).$$

Ad.(f): Mit den Teilen (d) und (e) ist die Abbildung π_0 linear und für jedes $f \in B_0$ die

$$\|\pi_0(f)\|_{QN_0} = \|\omega_0(i_0(f))\|_{QN_0} = q_0(i_0(f)) \leq \|f\|_B.$$

Es bleibt also die Surjektivität von π_0 zu zeigen. Sei dazu $\hat{f} \in QN_0$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $f \in Q_0$, und nach Lemma 9.16 gibt es ein $g \in B_0$ mit $g \& f$. Daher folgt $\hat{g} = \hat{f}$ und somit auch $\pi_0(g) = \hat{f}$.

Ad.(c) (vgl. Beweis von Lemma 2.16(c)): Nach Lemma 9.15 ist $(QN_0, \|\cdot\|_{QN_0})$ ein normierter Raum. Im folgenden setzen wir demnach Y als vollständig voraus und geben uns eine Folge $(\hat{f}_n)$ aus QN_0 mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_n\|_{QN_0} < \infty$$

vor. Wegen Lemma 9.16 existiert dann eine Folge (g_n) in B_0, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\pi_0(g_n) = \hat{f}_n \quad \text{und} \quad \|g_n\|_B \leq \|\hat{f}_n\|_{QN_0} + 2^{-n}.$$

Damit konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

absolut im Raum $(B_0, \|\cdot\|_B)$, der nach Teil (a) vollständig ist. Demzufolge gibt es ein $g \in B_0$ mit

$$\sum_{n=1}^{k} g_n \to g \text{ für } k \to \infty$$

in $(B_0, \|\cdot\|_B)$ und weiter

$$\sum_{n=1}^{k} \hat{f}_n \to \pi(g) \text{ für } k \to \infty$$

in $(QN_0, \|\cdot\|_{QN_0})$, denn die Abbildung π_0 von $(B_0, \|\cdot\|_B)$ nach $(QN_0, \|\cdot\|_{QN_0})$ ist nach Teil (f) linear und stetig. Also ist

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n$$

konvergent und somit $(QN_o, \|\cdot\|_{QN_o})$ ein BANACH-Raum.

q.e.d.

§ 10. DIE FUNKTION d_o

Im ganzen Abschnitt seien X, Y und Z reelle normierte Räume, $A \subset X$, $0 \in A \cap \overline{A \setminus \{0\}}$, $B \subset Y$, $0 \in B \cap \overline{B \setminus \{0\}}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi: \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}_o^+$ eine Funktion mit $\varphi(t) > 0$ für $t \in (0,\gamma]$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so ist damit wie immer die Funktion $\varphi: \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}_o^+$ definiert durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_o^+)$ gemeint.

Vergleichbar der Funktion $d: Q \to \mathbb{R}_o^+$ aus dem dritten Paragraphen werden wir jetzt eine Funktion $d_o: Q_o \to \mathbb{R}_o^+$ einführen und untersuchen. Letztere spielt bei unseren weiteren Überlegungen eine zentrale Rolle, da wir - wie sich herausstellen wird - im nächsten Abschnitt über d_o das "lokale Spektrum" eines Paares (T,S) nichtlinearer Abbildungen $S,T \in Q_o$ erklären und eine Reihe von Eigenschaften dieses Spektrums aus entsprechenden Eigenschaften von d_o herleiten können.

Definition 10.1.

Die Funktion $d_o(\varphi,A,Y): Q_o(\varphi,A,Y) \to \mathbb{R}_o^+$ definieren wir durch

$$\forall f \in Q_o(\varphi,A,Y): \quad d_o(\varphi,A,Y)(f) := \operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)}.$$

Nach Lemma 9.6 ist $d_o(\varphi,A,Y)$ wohldefiniert. Überdies wollen wir wieder vereinbaren, statt $d_o(\varphi,A,Y)$ auch kurz d_o zu schreiben, wenn Mißverständnisse auszuschließen sind.

Erste Merkmale der Funktion d_0 lassen sich nun wie nachstehend angegeben zusammenfassen.

Lemma 10.2.

Für alle $f,g \in Q_0$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $0 \leq d_0(f) \leq q_0(f)$.

(b) $d_0(\alpha f) = |\alpha| \cdot d_0(f)$.

(c) $d_0(f+g) \leq d_0(f) + q_0(g)$.

(d) $d_0(f) - q_0(g) \leq d_0(f+g)$.

(e) $|d_0(f) - d_0(g)| \leq q_0(f-g)$.

(f) $f \mathrel{\&} g \Rightarrow d_0(f) = d_0(g)$.

Beweis:

Die Teile (a) und (b) sind klar.

Ad.(c): Es seien $f,g \in Q_0$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es eine Konstante $b \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $x \in A$ mit $\|x\| \leq b$ die

$$\begin{aligned} \|(f+g)(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \|f(x)\| + (q_0(g)+\varepsilon) \cdot \varphi(\|x\|) \end{aligned}$$

ist. Demnach gilt für jedes $x \in A$, $0 < \|x\| \leq \min\{b,\gamma\}$:

$$\frac{\|(f+g)(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \leq \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q_0(g) + \varepsilon$$

und weiter

$$\begin{aligned} d_0(f+g) &= \operatorname{A-lim\,inf}_{x \to 0} \frac{\|(f+g)(x)\|}{\varphi(\|x\|)} \\ &\leq \operatorname{A-lim\,inf}_{x \to 0} \left(\frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q_0(g) + \varepsilon \right) \\ &= \operatorname{A-lim\,inf}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\varphi(\|x\|)} + q_0(g) + \varepsilon \\ &= d_0(f) + q_0(g) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, bedeutet dies die Behauptung.

Die Punkte (d) und (e) ergeben sich jetzt aus (c) (vgl. Beweis von Lemma 3.2(d),(e)), während (f) unmittelbar aus (e) folgt.

q.e.d.

Lemma 10.3.

Es sei $f \in Q_0(1,A,Y)$, $f(A) \subset B$ und $g \in Q_0(a,B,Z)$. Dann folgt:

$g \circ f \in Q_0(a,A,Z)$ und $d_0(a,A,Z)(g \circ f) \leq q_0(a,B,Z)(g) \cdot [d_0(1,A,Y)(f)]^a$.

Beweis:

Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Voraussetzung gibt es dann Konstanten b_f, c_f und b_g aus $\mathbb{R}^+$ mit

$$\forall x \in A, \|x\| \leq b_f: \ \|f(x)\| \leq c_f \cdot \|x\|$$

und

$$\forall y \in B, \|y\| \leq b_g: \ \|g(y)\| \leq (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon) \cdot \|y\|^a,$$

wobei wir o.B.d.A. noch $b_f c_f \leq b_g$ annehmen können. Darum erhalten wir weiter:

$$\forall x \in A, \|x\| \leq b_f: \ \|(g \circ f)(x)\| \leq (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon) \cdot \|f(x)\|^a \leq (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon) c_f{}^a \cdot \|x\|^a,$$

d.h. $g \circ f \in Q_0(a,A,Z)$ und

$$\forall x \in A, 0 < \|x\| \leq b_f: \ \frac{\|(g \circ f)(x)\|}{\|x\|^a} \leq (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\right)^a.$$

Also wird

$$\begin{aligned} d_0(a,A,Z)(g \circ f) &= \operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x \to \infty} \frac{\|(g \circ f)(x)\|}{\|x\|^a} \\ &\leq \operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x \to 0} \left((q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\right)^a\right) \\ &= (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon)\left(\operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\right)^a \\ &= (q_0(a,B,Z)(g)+\varepsilon) \cdot [d_0(1,A,Y)(f)]^a. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, ist hiermit alles bewiesen.

q.e.d.

Mit dem nächsten Beispiel und vor allem dem sich anschließenden Lemma motivieren wir die Definition des "lokalen Spektrums" eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren S und T aus Q_0.

Beispiel 10.4.

(a) Es sei $f:A\to Y$ und

$$\forall x\in A\,\forall r\in\mathbb{R}^+\,\exists t\in(0,r]:\quad tx\in A \text{ und } f(tx)=t^a f(x).$$

Dann folgt:

$$f\in Q_0(a,A,Y) \;\Rightarrow\; d_0(a,A,Y)(f)=\operatorname*{A\text{-}inf}_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}.$$

(b) Es sei $f:A\to B$ bijektiv mit der Inversen $f^{-1}:B\to A$, $f\in Q_0(1,A,Y)$ und $f^{-1}\in Q_0(1,B,X)$. Dann folgt:

$$q_0(1,B,X)(f^{-1})>0 \text{ und } d_0(1,A,Y)(f)=[q_0(1,B,X)(f^{-1})]^{-1}.$$

Beweis:

Ad.(a): Es sei $f:A\to Y$ von der angegebenen Art, $f\in Q_0(a,A,Y)$ und

$$c_0 := \operatorname*{A\text{-}inf}_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}.$$

Dann gibt es eine Folge $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|^a}=c_0.$$

Darüber hinaus existiert nach Voraussetzung zu jedem x_n $(n\in\mathbb{N})$ ein $t_n\in\mathbb{R}^+$, so daß

$$t_n x_n\in A,\ 0<\|t_n x_n\|\leq\tfrac{1}{n} \text{ und } f(t_n x_n)=t_n^a f(x_n)$$

gilt. Also wird

$$d_0(a,A,Y)(f)=\operatorname*{A\text{-}lim\,inf}_{x\to 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|^a}\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{\|f(t_n x_n)\|}{\|t_n x_n\|^a}$$

$$=\liminf_{n\to\infty}\frac{t_n^a\|f(x_n)\|}{t_n^a\|x_n\|^a}=c_0.$$

Andererseits ist trivialerweise $d_0(a,A,Y)(f)\geq c_0$.

Ad.(b): Wir setzen zur Abkürzung $g:=f^{-1}:B\to A$. Damit gibt es zunächst Konstanten b_f, b_g, c_f und c_g aus $\mathbb{R}^+$ mit

$$\forall x\in A,\|x\|\leq b_f:\ \|f(x)\|\leq c_f\cdot\|x\|$$

und

$$\forall y\in B,\|y\|\leq b_g:\ \|g(y)\|\leq c_g\cdot\|y\|.$$

Hieraus schließen wir auf

(10.1) $\forall x\in A, \|x\|\leq \min\{b_f, b_g/c_f\} \in \mathbb{R}^+$:

$$\|x\| = \|g(f(x))\| \leq c_g \cdot \|f(x)\| \leq c_g c_f \cdot \|x\|$$

und

(10.2) $\forall y\in B, \|y\|\leq \min\{b_g, b_f/c_g\} \in \mathbb{R}^+$:

$$\|y\| = \|f(g(y))\| \leq c_f \cdot \|g(y)\| \leq c_f c_g \cdot \|y\| .$$

Nach (10.2) folgt sofort

$$q_0(1,B,X)(g) = \overset{B\text{-}\lim\sup}{y\to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \geq \frac{1}{c_f} > 0,$$

während wir aus (10.1) und (10.2) zusammen

$$x\to 0 \ (x\in A) \ \Leftrightarrow \ f(x)\to 0 \ (x\in A)$$

und somit

$$0 < q_0(1,B,X)(g) = \overset{B\text{-}\lim\sup}{y\to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = \overset{A\text{-}\lim\sup}{x\to 0} \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}$$

$$= \left(\overset{A\text{-}\lim\inf}{x\to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\right)^{-1}$$

$$= [d_0(1,A,Y)(f)]^{-1}$$

erhalten.

q.e.d.

Das Beispiel 10.4(b) läßt nun folgendes erkennen:

Ist X ein reeller BANACH-Raum, $U\subset X$ offen, $0\in U$, $L:X\to X$ linear und vollstetig, $N:U\to X$ vollstetig mit

$$\overset{U\text{-}\lim}{x\to 0} \frac{\|Nx\|}{\|x\|} = 0$$

und $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kein Eigenwert des Paares (I,L) (im üblichen Sinne, d.h. $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\sigma^X(I,L)\cup\{0\})$), dann wird nach der FREDHOLMschen Alternative für lineare vollstetige Operatoren und dem "Satz vom inversen Operator" $\lambda I-L$ ein linearer Homöomorphismus von X auf X. Demnach bezeichnet $V:=(\lambda I-L)(U)$ ebenfalls eine offene Umgebung der Null. Weiter ist vermöge Beispiel 9.13 noch $\lambda I-L\in B_0(1,U,X)$, $\lambda I-(L+N)\in Q_0(1,U,X)$ und $\lambda I-(L+N)\overset{\&}{\sim}\lambda I-L$. Also erhalten wir mit Lemma 10.2(f), Beispiel 10.4(b), Beispiel 9.8(b) und Beispiel 1.7(b):

$$\begin{aligned} d_0(1,U,X)(\lambda I-(L+N)) &= d_0(1,U,X)(\lambda I-L) \\ &= [q_0(1,V,X)((\lambda I-L)^{-1})]^{-1} \cdot \\ &= [\|(\lambda I-L)^{-1}\|_{B(1,V,X)}]^{-1} \\ &= [\|(\lambda I-L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1}, \end{aligned}$$

d.h. insbesondere

(10.3) $\quad d_0(1,U,X)(\lambda I-(L+N)) > 0.$

Schließlich gibt es offenbar ein $r\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $x\in U$ mit $0<\|x\|\leq r$ gilt:

(10.4) $$\begin{aligned} \|\lambda x-(L+N)(x)\| &\geq \|\lambda x-Lx\|-\|Nx\| \\ &\geq [\|(\lambda I-L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1}\cdot\|x\|-\|Nx\| \\ &\geq \tfrac{1}{2}\cdot[\|(\lambda I-L)^{-1}\|_{L(X,X)}]^{-1}\cdot\|x\|. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (10.4) könnte man aber - entsprechend dem globalen Fall (vgl. S.44/45) - dazu verwenden, um mit Hilfe der Theorie des Abbildungsgrades von LERAY und SCHAUDER die lokale Surjektivität der Abbildung $\lambda I-(L+N):U\to X$ in Null zu zeigen, d.h.

$$\exists U_0,V_0\subset X \text{ offen}, 0\in U_0\subset U, 0\in V_0: (\lambda I-(L+N))(U_0)\supset V_0.$$

Wüßten wir jetzt außerdem, daß die Bedingung (10.3) die Eigenschaft (10.4) impliziert, so wäre es naheliegend, die Menge aller $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $d_0(1,U,X)(\lambda I-(L+N))=0$ als das "lokale Spektrum" des Paares $(I,L+N)$ zu definieren. Tatsächlich besteht jedoch dieser Zusammenhang. Die zugehörige Aussage formulieren wir zweckmäßigerweise gleich für gewisse Homotopien und bekommen allgemeiner das

Lemma 10.5.

Es sei $h:[0,1]\times A\to Y$ und $h(t,\cdot)\in Q_0(\varphi,A,Y)$ für jedes $t\in[0,1]$. Ist ferner für alle $t_0\in[0,1]$ der

(10.5) $$\lim_{\substack{t\to t_0\\ x\to 0\\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|h(t,x)-h(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0,$$

dann folgt:

(a) $[\forall t\in[0,1]: d_0(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot)) > 0] \Leftrightarrow$
$[\exists B,C\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, 0<\|x\|\leq B\forall t\in[0,1]: C\cdot\varphi(\|x\|)\leq\|h(t,x)\|]$.

(b) $[\forall t\in[0,1]: d_0(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot)) > 0] \Rightarrow$
$[\exists r\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, 0<\|x\|\leq r\forall t\in[0,1]: h(t,x)\neq 0]$.

Beweis:

Ad.(a): "⇒" Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h.

$$\forall B,C\in\mathbb{R}^+\exists x\in A, 0<\|x\|\leq B\exists t\in[0,1]: C\cdot\varphi(\|x\|) > \|h(t,x)\|.$$

Dann erhalten wir Folgen $(C_n)\subset\mathbb{R}^+$, $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ und $(t_n)\subset[0,1]$ mit $C_n\to 0$, $x_n\to 0$, und für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$C_n\cdot\varphi(\|x_n\|) > \|h(t_n,x_n)\| \geq 0.$$

O.B.d.A. können wir dabei noch die Konvergenz der Folge (t_n) gegen ein Element $t_0\in[0,1]$ voraussetzen. Demnach ergibt sich zusammen mit (10.5):

$$\begin{aligned} 0 \leq d_0(\varphi,A,Y)(h(t_0,\cdot)) &= \operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x\to 0} \frac{\|h(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|h(t_0,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\|h(t_0,x_n)-h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} + \frac{\|h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\|h(t_0,x_n)-h(t_n,x_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)} + C_n\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $d_0(\varphi,A,Y)(h(t_0,\cdot))>0$.

"⇐" Es sei $t\in[0,1]$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Voraussetzung ist für alle $x\in A$ mit $0<\|x\|\leq\min\{B,\gamma\}$ die

$$\frac{\|h(t,x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq C$$

und daher

$$d_0(\varphi,A,Y)(h(t,\cdot)) = \operatorname*{A\text{-}lim\ inf}_{x\to 0} \frac{\|h(t,x)\|}{\varphi(\|x\|)} \geq C > 0.$$

Ad.(b): Direkte Folge von Teil (a), da $\varphi(\|x\|)>0$ ist für alle $x\in A$, $0<\|x\|\leq\gamma$.

q.e.d.

In erster Linie der Teil (a) des letzten Lemmas gibt nun end-

gültig Aufschluß darüber, wie wir für ein Paar (T,S) nichtlinearer Abbildungen $S,T \in Q_0(\varphi,A,Y)$ in sinnvoller Weise ein "lokales Spektrum" erklären können. Es werden dies gemäß unserem weiter oben, im speziellen Fall gemachten Vorschlag, alle diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ sein, für die $d_0(\varphi,A,Y)(\lambda T-S)=0$ ist.

Als nützlich im Hinblick auf die später zu formulierenden lokalen Sätze vom FREDHOLM Typ erweist sich im Zusammenhang mit Lemma 10.5 noch die

Definition 10.6.

Es sei $f:D(f)\to Y$ mit $A\subset D(f)\subset X$ und $f(0)=0$. Dann heißt

(a) die Abbildung f genau dann *gleichmäßig φ-lokal regulär in Null bez. A*, wenn gilt:

$$\exists B,C \in \mathbb{R}^+ \forall x\in A, 0<\|x\|\leq B: \quad C\cdot\varphi(\|x\|) \leq \|f(x)\| .$$

(b) die Abbildung f genau dann *lokal surjektiv in Null*, wenn es offene Mengen $U\subset X$ mit $0\in U\subset D(f)$ und $V\subset Y$ mit $0\in V$ gibt, so daß $f(U)\supset V$ ist.

(c) die Abbildung f genau dann *gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A*, wenn f gleichmäßig φ-lokal regulär in Null bez. A und lokal surjektiv in Null ist.

(d) die Gleichung

$$f(x) = y \quad (x\in D(f),\ y\in Y)$$

genau dann *gleichmäßig φ-lokal regulär lösbar in Null bez. A*, wenn die Abbildung f gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A ist.

§ 11. DAS φ-LOKALE SPEKTRUM

Im ganzen Abschnitt seien W, X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 und Z reelle normierte Räume, $A,B\subset X$, $0\in A\cap\overline{A\setminus\{0\}}$, $0\in B\cap\overline{B\setminus\{0\}}$, $A_1\subset X_1$, $A_2\subset X_2$, $0\in A_1\cap\overline{A_1\setminus\{0\}}$, $0\in A_2\cap\overline{A_2\setminus\{0\}}$, $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für $t\in(0,\gamma]$ und $a\in\mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter wieder die durch $\varphi(t):=t^a$ $(t\in\mathbb{R}_0^+)$ definierte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ verstanden werden.

Wie das Lemma 10.5 und die in diesem Zusammenhang gemachten Bemerkungen ergeben haben, wird bei den später herzuleitenden lokalen Surjektivitätssätzen für Operatoren der Form $\lambda T-S$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$ und $S,T\in Q_0$ benötigt, daß $d_0(\lambda T-S)>0$ ist. Wir erklären daher das "lokale Spektrum" dieses Paares (T,S) wie angekündigt in der

Definition 11.1.

Für $S,T\in Q_0(\varphi,A,Y)$ heißt die Menge

$$\Sigma_\varphi^A(T,S)_0 := \{\lambda\in\mathbb{R}\mid d_0(\varphi,A,Y)(\lambda T-S)=0\}$$

das *φ-lokale Spektrum des Paares (T,S) in Null bez. A*, und jeder Wert $\lambda\in\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ heißt *φ-lokaler Eigenwert des Paares (T,S) in Null bez. A*.

Falls keine Verwechslungen befürchtet werden müssen, schreiben wir im folgenden an Stelle von $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ auch kurz $\Sigma(T,S)_0$.

Sind nun die Mengen A und B vergleichbar, so trifft dies ebenfalls für die zugehörigen φ-lokalen Spektren zu. Genauer gilt das

Lemma 11.2.

Es sei $A\subset B$ und $S,T\in Q_0(\varphi,B,Y)$. Dann folgt:

$S,T\in Q_0(\varphi,A,Y)$ und $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0\subset\Sigma_\varphi^B(T,S)_0$.

Beweis:

Analog zum Beweis von Lemma 4.2.

q.e.d.

Bei unseren lokalen Surjektivitätssätzen vom FREDHOLM Typ werden wir demnach bemüht sein, die Menge A so "klein" wie möglich zu halten.

Die beiden nächsten Lemmata liefern Schranken für die Beträge der φ-lokalen Eigenwerte sowie topologische Eigenschaften des φ-lokalen Spektrums.

Lemma 11.3.

Für alle $S,T\in Q_0$ und jedes $\lambda\in\Sigma(T,S)_0$ gilt:

(a) $|\lambda|\cdot d_0(T) \leq q_0(S)$.

(b) $d_0(S) \leq |\lambda|\cdot q_0(T)$.

(c) $[d_0(T)>0 \wedge \exists r\in\mathbb{R}^+\forall x\in A, \|x\|\leq r: \|Sx\|=\|Tx\|] \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Beweis:

Ad.(a): Mit Lemma 10.2(b),(d) analog zum Beweis von Lemma 4.3(a).

Ad.(b): Mit Lemma 10.2(b),(d) analog zum Beweis von Lemma 4.3(b).

Ad.(c): Es seien $S,T\in Q_0$, $d_0(T)>0$, $r\in\mathbb{R}^+$, $\|Sx\|=\|Tx\|$ für jedes $x\in A$ mit $\|x\|\leq r$, $\lambda\in\Sigma(T,S)_0$ und somit $d_0(\lambda T-S)=0$. Dann gibt es für alle $\varepsilon,R\in\mathbb{R}^+$, $R\leq\gamma$, ein $x\in A$, $0<\|x\|\leq R$, so daß die

$$\frac{\|\lambda Tx-Sx\|}{\varphi(\|x\|)} < \varepsilon$$

ist. Hieraus bekommen wir insbesondere die Existenz einer Folge $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ mit

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0 < \|x_n\| \leq \min\{\tfrac{1}{n},\gamma,r\} \wedge \frac{\|\lambda Tx_n-Sx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} < \tfrac{1}{n},$$

d.h.

$$(11.1)\qquad \forall n\in\mathbb{N}: \frac{\|Sx_n\|-|\lambda|\,\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \tfrac{1}{n}$$

und

(11.2) $$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{|\lambda| \|Tx_n\| - \|Sx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \frac{1}{n}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß nach Voraussetzung die $\|Tx_n\| = \|Sx_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$ ist, so ergeben die Ungleichungen (11.1) und (11.2):

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} - \frac{1}{n} \leq |\lambda| \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} + \frac{1}{n}$$

und weiter

(11.3) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq |\lambda| \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)}.$$

Zusammen mit

$$0 < d_0(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)}$$

ist daher nach (11.3) der $|\lambda| = 1$.

q.e.d.

Ist nun $d_0(T) > 0$ bzw. $d_0(S) > 0$, so liefert der Teil (a) von Lemma 11.3 eine Abschätzung für $|\lambda|$ nach oben bzw. der Teil (b) eine Abschätzung für $|\lambda|$ nach unten.

Lemma 11.4.

Für alle $S,T \in Q_0$ gilt:

(a) $\Sigma(T,S)_0$ ist abgeschlossen.

(b) $d_0(T) > 0 \Rightarrow \Sigma(T,S)_0$ ist kompakt.

Beweis:

Ad.(a): Mit Lemma 10.2(e) analog zum Beweis von Lemma 4.4(a).

Ad.(b): Mit Lemma 11.3(a) und Teil (a) analog zum Beweis von Lemma 4.4(b).

q.e.d.

Die beiden folgenden Lemmata haben für unsere weiteren Überlegungen keine allzu große Bedeutung. Sie sind jedoch im Zusammenhang mit den übrigen in diesem Paragraphen dargestellten

Eigenschaften des φ-lokalen Spektrums nicht ohne Interesse.

Lemma 11.5.

Für alle $S,T\in Q_0$ und jedes $\mu\in\mathbb{R}$ gilt:

(a) $\mu\neq 0 \Rightarrow \Sigma(T,\mu S)_0 = \mu\cdot\Sigma(T,S)_0$.

(b) $[\Sigma(T,S)_0\neq\phi \wedge d_0(T)>0] \Rightarrow \Sigma(T,\mu S)_0 = \mu\cdot\Sigma(T,S)_0$.

(c) $\Sigma(T,\mu T+S)_0 = \mu+\Sigma(T,S)_0$.

Beweis:

Analog zum Beweis von Lemma 4.5.

q.e.d.

Bevor wir zum nächsten Lemma kommen, sei noch einmal kurz daran erinnert, daß wir auf der direkten Summe $X_1\times X_2$ zweier normierter Räume $(X_1,\|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2,\|\cdot\|_{X_2})$ stets die durch

(11.4) $\quad \forall(x_1,x_2)\in X_1\times X_2: \quad \|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2} := \|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2}$

erklärte Norm $\|\cdot\|_{X_1\times X_2}$ betrachten (vgl. S.52).

Lemma 11.6.

(a) Es seien $H_1:W\to X$ und $H_2:Y\to Z$ lineare Homöomorphismen und $S,T\in Q_0(a,A,Y)$. Dann folgt:

$H_2SH_1, H_2TH_1\in Q_0(a,H_1^{-1}(A),Z)$ und

$\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)_0 = \Sigma_a^A(T,S)_0$.

(b) Es sei $a\geq 1$, $S_1,T_1\in Q_0(a,A_1,Y_1)$ und $S_2,T_2\in Q_0(a,A_2,Y_2)$. Dann folgt:

$S_1\times S_2, T_1\times T_2\in Q_0(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)$ und

$\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)_0 = \Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)_0 \cup \Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2)_0$.

Beweis:

Ad.(a): Zunächst ist unter den gemachten Voraussetzungen mit $0\in A\cap\overline{A\setminus\{0\}}\subset X$ auch $0\in H_1^{-1}(A)\cap\overline{H_1^{-1}(A)\setminus\{0\}}\subset W$.

(i) Wir zeigen: $H_2SH_1\in Q_0(a,H_1^{-1}(A),Z)$. Da $S\in Q_0(a,A,Y)$ und H_1

ein linearer Homöomorphismus von W auf X ist, schließen wir sofort auf

(11.5) $\exists b,c \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, \|x\| \leq b: \|Sx\| \leq c\|x\|^a$

und

(11.6) $\forall w \in H_1^{-1}(A), \|w\| \leq b[\|H_1\|_{L(W,X)}]^{-1}:$
$\|H_1 w\| \leq \|H_1\|_{L(W,X)}\|w\| \leq b.$

Ferner ist auch $H_2: Y \to Z$ linear und stetig, und zusammen mit (11.5) und (11.6) ergibt sich für alle $w \in H_1^{-1}(A)$, $\|w\| \leq b \cdot [\|H_1\|_{L(W,X)}]^{-1} \in \mathbb{R}^+$:

$$\|H_2 S H_1 w\| \leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}\|S H_1 w\| \leq \|H_2\|_{L(Y,Z)} c\|H_1 w\|^a$$
$$\leq \|H_2\|_{L(Y,Z)} c[\|H_1\|_{L(W,X)}]^a \|w\|^a.$$

Demnach ist aber $H_2 S H_1 \in Q_0(a, H_1^{-1}(A), Z)$.

(ii) Wir zeigen: $\Sigma_a^A(T,S)_0 \subset \Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2 T H_1, H_2 S H_1)_0$. Sei hierzu $\lambda \in \Sigma_a^A(T,S)_0$ und also $d_0(a,A,Y)(\lambda T - S) = 0$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset A \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

(11.7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T x_n - S x_n\|}{\|x_n\|^a} = 0.$$

Setzen wir nun $w_n := H_1^{-1} x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist (w_n) eine Folge in $H_1^{-1}(A) \setminus \{0\}$, $\|w_n\| \geq [\|H_1\|_{L(W,X)}]^{-1}\|x_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$ und

(11.8) $w_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Weiter erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda H_2 T H_1 w_n - H_2 S H_1 w_n\|}{\|w_n\|^a} = \frac{\|H_2(\lambda T x_n - S x_n)\|}{\|w_n\|^a}$$
$$\leq \|H_2\|_{L(Y,Z)}[\|H_1\|_{L(W,X)}]^a \frac{\|\lambda T x_n - S x_n\|}{\|x_n\|^a}.$$

Unter Berücksichtigung von (11.7) und (11.8) wird somit

$$0 \leq d_0(a, H_1^{-1}(A), Z)(\lambda H_2 T H_1 - H_2 S H_1)$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda H_2 T H_1 w_n - H_2 S H_1 w_n\|}{\|w_n\|^a} = 0$$

und daher $\lambda\in\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)_0$.

(iii) Wir zeigen: $\Sigma_a^{H_1^{-1}(A)}(H_2TH_1,H_2SH_1)_0\subset\Sigma_a^A(T,S)_0$. Dies führt man analog zum Beweis von Lemma 4.6(a) auf Punkt (ii) zurück.

Ad.(b): Zunächst ist mit $0\in A_1\cap\overline{A_1\setminus\{0\}}\subset X_1$ und $0\in A_2\cap\overline{A_2\setminus\{0\}}\subset X_2$ trivialerweise auch $(0,0)\in A_1\times A_2\cap\overline{A_1\times A_2\setminus\{(0,0)\}}\subset X_1\times X_2$.

(i) Wir zeigen: $S_1\times S_2\in Q_0(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)$. Für $i=1,2$ gibt es nach Voraussetzung Konstanten $b_i,c_i\in\mathbb{R}^+$, so daß für alle $x_i\in A_i$ mit $\|x_i\|_{X_i}\leq b_i$ die

$$\|S_ix_i\|_{Y_i}\leq c_i\|x_i\|_{X_i}^a$$

ist. Daher erhalten wir für alle $(x_1,x_2)\in A_1\times A_2$, welche die Bedingung $\|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}=\|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2}\leq\min\{b_1,b_2\}\in\mathbb{R}^+$ erfüllen:

$$\begin{aligned}\|(S_1\times S_2)(x_1,x_2)\|_{Y_1\times Y_2} &= \|S_1x_1\|_{Y_1}+\|S_2x_2\|_{Y_2}\\ &\leq c_1\|x_1\|_{X_1}^a+c_2\|x_2\|_{X_2}^a\\ &\leq \max\{c_1,c_2\}(\|x_1\|_{X_1}^a+\|x_2\|_{X_2}^a)\\ &\leq \max\{c_1,c_2\}(\|x_1\|_{X_1}+\|x_2\|_{X_2})^a\\ &= \max\{c_1,c_2\}[\|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2}]^a,\end{aligned}$$

denn $a\geq 1$ (vgl. S.54). Demnach ist $S_1\times S_2\in Q_0(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)$.

(ii) Wir zeigen: $\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)_0\subset(\Sigma_a^{A_1}(T_1,S_1)_0\cup\Sigma_a^{A_2}(T_2,S_2)_0)$. Es sei also $\lambda\in\Sigma_a^{A_1\times A_2}(T_1\times T_2,S_1\times S_2)_0$ und folglich

$$d_0(a,A_1\times A_2,Y_1\times Y_2)(\lambda(T_1\times T_2)-(S_1\times S_2))=0.$$

Somit existiert eine Folge $((x_1^n,x_2^n))$ in $A_1\times A_2\setminus\{(0,0)\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(\|x_1^n\|_{X_1}+\|x_2^n\|_{X_2})=0 \tag{11.9}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\lambda T_1x_1^n-S_1x_1^n\|_{Y_1}+\|\lambda T_2x_2^n-S_2x_2^n\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1}+\|x_2^n\|_{X_2})^a}=0. \tag{11.10}$$

Ferner ist dabei für unendlich viele Indizes $n\in\mathbb{N}$ die $\|x_1^n\|_{X_1}\geq$

$\geq \|x_2^n\|_{X_2}$ oder die $\|x_2^n\|_{X_2} \geq \|x_1^n\|_{X_1}$. O.B.d.A. sei deshalb für alle $n \in \mathbb{N}$ die $\|x_1^n\|_{X_1} \geq \|x_2^n\|_{X_2}$ und demnach wegen

$$0 < \frac{1}{2}(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2}) \leq \|x_1^n\|_{X_1}$$

und (11.9) die

(11.11) $\|x_1^n\|_{X_1} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie der $\lim_{n\to\infty} \|x_1^n\|_{X_1} = 0$.

Weiter ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1} + \|\lambda T_2 x_2^n - S_2 x_2^n\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a} \geq \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a}$$

$$\geq \frac{1}{2^a} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a}.$$

Zusammen mit (11.10) und (11.11) bekommen wir nun

$$0 \leq d_0(a, A_1, Y_1)(\lambda T_1 - S_1) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a} = 0$$

und schließlich $\lambda \in \Sigma_a^{A_1}(T_1, S_1)_0$.

(iii) Wir zeigen: $(\Sigma_a^{A_1}(T_1, S_1)_0 \cup \Sigma_a^{A_2}(T_2, S_2)_0) \subset \Sigma_a^{A_1 \times A_2}(T_1 \times T_2, S_1 \times S_2)_0$. Hierfür sei $\lambda \in \Sigma_a^{A_1}(T_1, S_1)_0 \cup \Sigma_a^{A_2}(T_2, S_2)_0$. O.B.d.A. können wir dann sogar $\lambda \in \Sigma_a^{A_1}(T_1, S_1)_0$ annehmen, d.h.

$$d_0(a, A_1, Y_1)(\lambda T_1 - S_1) = 0.$$

Demnach gibt es eine Folge $(x_1^n) \subset A_1 \setminus \{0\}$ mit

(11.12) $\lim_{n\to\infty} \|x_1^n\|_{X_1} = 0$

und

(11.13) $\lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a} = 0.$

Darüber hinaus sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $x_2^n := 0 \in A_2$. Offenbar ist nun $(x_1^n, x_2^n) \in A_1 \times A_2 \setminus \{(0,0)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ und nach (11.12) der

(11.14) $\lim_{n\to\infty} \|(x_1^n, x_2^n)\|_{X_1 \times X_2} = \lim_{n\to\infty} \|x_1^n\|_{X_1} = 0.$

Außerdem erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|\lambda(T_1 \times T_2)(x_1^n, x_2^n) - (S_1 \times S_2)(x_1^n, x_2^n)\|_{Y_1 \times Y_2}}{[\|(x_1^n, x_2^n)\|_{X_1 \times X_2}]^a}$$

$$= \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1} + \|\lambda T_2 x_2^n - S_2 x_2^n\|_{Y_2}}{(\|x_1^n\|_{X_1} + \|x_2^n\|_{X_2})^a}$$

$$= \frac{\|\lambda T_1 x_1^n - S_1 x_1^n\|_{Y_1}}{\|x_1^n\|_{X_1}^a}.$$

Demzufolge hat sich zusammen mit (11.14) und (11.13) ergeben:

$$0 \leq d_0(a, A_1 \times A_2, Y_1 \times Y_2)(\lambda(T_1 \times T_2) - (S_1 \times S_2))$$

$$\leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\|\lambda(T_1 \times T_2)(x_1^n, x_2^n) - (S_1 \times S_2)(x_1^n, x_2^n)\|_{Y_1 \times Y_2}}{[\|(x_1^n, x_2^n)\|_{X_1 \times X_2}]^a}$$

$$= 0,$$

d.h. $\lambda \in \Sigma_a^{A_1 \times A_2}(T_1 \times T_2, S_1 \times S_2)_0$.

q.e.d.

Von besonderem Gewicht für unsere weiteren Untersuchungen ist die Frage, in welchem Verhältnis die φ-lokalen Spektren $\Sigma(T,S)_0$ und $\Sigma(T_0,S_0)_0$ nichtlinearer Abbildungen $S, S_0, T, T_0 \in Q_0$ stehen, deren Differenzen $S-S_0$ und $T-T_0$ in einem gewissen Sinne "klein" sind. Eine zufriedenstellende Antwort hierauf gibt das

Lemma 11.7.

(a) Es seien $S, S_0, T, T_0 \in Q_0$ mit $S \mathrel{\&} S_0$ und $T \mathrel{\&} T_0$. Dann folgt:

$$\Sigma(T,S)_0 = \Sigma(T_0,S_0)_0.$$

(b) Es seien $S_0, T_0 \in Q_0$, $d_0(T_0) > 0$ und $V \subset \mathbb{R}$ eine (nach Lemma 11.4(b) stets existierende) offene Umgebung von $\Sigma(T_0,S_0)_0$. Dann folgt:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall S, T \in Q_0, q_0(S-S_0) < \varepsilon, q_0(T-T_0) < \varepsilon: \quad \Sigma(T,S)_0 \subset V.$$

Beweis:

Ad.(a): Mit Lemma 10.2(f) analog zum Beweis von Lemma 4.7(a).

Ad.(b): Mit Lemma 10.2(d), Lemma 11.3(a) und Lemma 10.2(e) analog zum Beweis von Lemma 4.7(b).

q.e.d.

Diesen Paragraphen abschließend untersuchen wir noch Zusammenhänge zwischen den Spektren $\sigma(T,S)$ (vgl. S.47) und $\Sigma(T,S)_0$.

Lemma 11.8.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(a,A,Y)$, $S \mathfrak{L} S_0$, $T \mathfrak{L} T_0$ und

$$\forall x \in A \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists t \in (0,r]:$$
$$tx \in A,\ S_0(tx) = t^a S_0 x \text{ und } T_0(tx) = t^a T_0 x.$$

Dann folgt:

$$\sigma^A(T_0,S_0) \subset \Sigma_a^A(T,S)_0.$$

(b) Es sei A abgeschlossen, I_A die Identität auf A, $S,S_0,T \in Q_0(1,A,X)$, $S \mathfrak{L} S_0$, $T \mathfrak{L} I_A$ und

$$\exists r,R \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, 0 < \|x\| \leq r:$$
$$R\frac{x}{\|x\|} \in A \text{ und } S_0\left(R\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{R}{\|x\|} S_0 x.$$

Ferner sei $S_0 : A \to X$ vollstetig. Dann folgt:

$$\Sigma_1^A(T,S)_0 \setminus \{0\} \subset \sigma^A(I_A,S_0) \setminus \{0\}.$$

(c) Es sei X ein reeller reflexiver BANACH-Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$, A schwach abgeschlossen, $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(a,A,X^*)$, $S \mathfrak{L} S_0$, $T \mathfrak{L} T_0$ und

$$\exists r,R \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, 0 < \|x\| \leq r:$$
$$R\frac{x}{\|x\|} \in A,\ S_0\left(R\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{R^a}{\|x\|^a} S_0 x \text{ und } T_0\left(R\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{R^a}{\|x\|^a} T_0 x.$$

Ferner erfülle die Abbildung $\lambda T_0 - S_0 : A \to X^*$ die Bedingung (S) und sei halbstetig. Dann folgt:

$$\lambda \in \Sigma_a^A(T,S)_0 \ \Rightarrow\ \lambda \in \sigma^A(T_0,S_0).$$

Beweis:

Ad.(a): Unter den gemachten Voraussetzungen sei $\lambda \in \sigma^A(T_0,S_0)$. Dann gibt es ein $x_0 \in A \setminus \{0\}$ mit $\lambda T_0 x_0 - S_0 x_0 = 0$, und vermöge Beispiel 10.4(a) ist $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0,S_0)_0$. Nach Lemma 11.7(a) gilt aber

$$\Sigma_a^A(T_o,S_o)_o = \Sigma_a^A(T,S)_o,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Ad.(b): Zunächst ist offensichtlich $I_A \in Q_o(1,A,X)$ und demnach die Bedingung $T \& I_A$ sinnvoll. Sei nun $\lambda \in \Sigma_1^A(T,S)_o \setminus \{0\}$. Wegen Lemma 11.7(a) ist dann auch $\lambda \in \Sigma_1^A(I_A,S_o)_o \setminus \{0\}$ und daher

$$d_o(1,A,X)(\lambda I_A - S_o) = 0.$$

Hiernach existiert eine Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda x_n - S_o x_n\|}{\|x_n\|} = 0,$$

weshalb wir o.B.d.A. noch die $\|x_n\| \leq r$ $(n \in \mathbb{N})$ annehmen können. Setzt man jetzt $v_n := R\frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die $\|v_n\| = R$ und nach Voraussetzung $v_n \in A$ sowie

$$\lambda v_n - S_o v_n = \lambda R\frac{x_n}{\|x_n\|} - S_o\left(R\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = R\frac{\lambda x_n - S_o x_n}{\|x_n\|},$$

d.h. der

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda v_n - S_o v_n\| = 0,$$

woraus wir analog zum Beweis von Lemma 4.8(b) auf $\lambda \in \sigma^A(I_A,S_o) \setminus \{0\}$ schließen.

Ad.(c): Es sei $\lambda \in \Sigma_a^A(T,S)_o$. Unter den getroffenen Voraussetzungen ist nach Lemma 11.7(a) somit gleichfalls $\lambda \in \Sigma_a^A(T_o,S_o)_o$ und damit $d_o(a,A,X^*)(\lambda T_o - S_o) = 0$. Deshalb gibt es eine Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_o x_n - S_o x_n\|}{\|x_n\|^a} = 0,$$

wobei wir o.B.d.A. die $\|x_n\| \leq r$ $(n \in \mathbb{N})$ annehmen wollen. Setzt man nun wieder $v_n := R\frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, dann ist $v_n \in A$, die $\|v_n\| = R$ und wegen der geforderten Homogenitätseigenschaften

$$\lambda T_o v_n - S_o v_n = \lambda T_o\left(R\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) - S_o\left(R\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = R^a\frac{\lambda T_o x_n - S_o x_n}{\|x_n\|^a},$$

d.h. der

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda T_o v_n - S_o v_n\| = 0,$$

womit analog zum Beweis von Lemma 4.8(c) $\lambda\in\sigma^A(T_o,S_o)$ folgt.

q.e.d.

Ist speziell A ein abgeschlossener Unterraum von X, I_A die Identität auf A und $L:A\to X$ linear und vollstetig (insbesondere sind also $I_A, L\in Q_o(1,A,X)$), so wird nach Lemma 11.8(a),(b)

$$\Sigma_1^A(I_A,L)_o\setminus\{0\} = \sigma^A(I_A,L)\setminus\{0\}.$$

Bemerkung 11.9.

Es sei X ein reeller BANACH-Raum und L eine lineare und stetige Abbildung von X in X. Ferner sei R(L) die Resolventenmenge von L, d.h.

$$R(L) := \{\lambda\in\mathbb{R} \mid \lambda I - L: X\to X \text{ ist bijektiv}\}$$

und

$$S(L) := \mathbb{R}\setminus R(L)$$

(vgl. Bemerkung 4.9). Dann folgt (vgl. [16]):

$$\Sigma_1^X(I,L)_o \subset S(L).$$

Ist darüber hinaus der Operator $L:X\to X$ sogar vollstetig, so läßt sich außerdem

$$\Sigma_1^X(I,L)_o = S(L)$$

zeigen (vgl. [16]).

Im übrigen können die Verhältnisse recht unterschiedlich sein. Betrachten wir hierzu einmal den Raum $Q_o(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$. Definiert man dann (vgl. S.63) $S,T: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $Sx:=x/(1+x^2)$ und $Tx:=x$ $(x\in\mathbb{R})$, so sind offenbar $S,T\in Q_o(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und wegen

$$\forall x\in\mathbb{R}\,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda Tx - Sx = (\lambda - \frac{1}{1+x^2})x$$

erhalten wir $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_o=\{1\}$ sowie $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=(0,1)$. Insbesondere ist also $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ nicht abgeschlossen und $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_o\cap\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\phi$.

Erklären wir dagegen $S,T: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vermöge $Sx:=Tx:=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$, dann

sind S und T ebenfalls Elemente von $Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und aus

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda Tx - Sx = (\lambda - 1)x^2$$

folgt sowohl $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0 = \mathbb{R}$ als auch $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S) = \{1\}$, d.h. $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ ist eine echte Teilmenge von $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0$.

Legen wir schließlich die Abbildungen $S,T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $Sx := x$ und $Tx := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ fest, so sind gleichfalls $S,T \in Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und zusammen mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda Tx - Sx = (\lambda x - 1)x$$

ergibt sich für die beiden Spektren: $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0 = \phi$ und $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0$ ist eine echte Teilmenge von $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$. Oberdies ist $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)$ nicht abgeschlossen.

§ 12. LOKALE SÄTZE VOM FREDHOLM TYP

Im folgenden leiten wir lokale Versionen der bereits im ersten Kapitel formulierten Sätze vom FREDHOLM Typ her, untersuchen also insbesondere Abbildungen der Form $\lambda T - S$ aus einem noch genauer festzulegenden Raum $Q_0(\varphi,A,Y)$. Wie schon der Einleitung zu entnehmen war, wird dabei als Bildraum Y stets der zum zugrundeliegenden Raum X duale Raum X^* angenommen. Ferner müssen die Bedingungen an X selbst, an die Menge A und an die Funktion φ über das Gewohnte hinaus verschärft werden. Entsprechend dem globalen Fall sind die sich dann ergebenden Resultate - vor allem hinsichtlich des Parameters λ - optimal, d.h. unter den gestellten Voraussetzungen nicht zu verbessern.

Im einzelnen fordern wir grundsätzlich für den ganzen Abschnitt (vgl. § 6):

Es sei X ein reeller, reflexiver und separabler BANACH-Raum

und (Ω_k) eine Folge von Teilmengen von X mit

$$\forall k \in \mathbb{N}:$$

Ω_k ist offen, beschränkt, symmetrisch und $0 \in \Omega_k$.

Darüber hinaus verlangen wir, daß für

$$M_k := \sup_{x \in \partial\Omega_k} \|x\| \quad (k \in \mathbb{N})$$

der

$$\lim_{k \to \infty} M_k = 0 \tag{12.1}$$

ist. Schließlich sei A eine symmetrische Teilmenge von X mit

$$0 \in A \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k,$$

Δ eine symmetrische und schwach abgeschlossene Teilmenge von X mit

$$\Delta \supset (A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k),$$

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion, die der Bedingung

$$\forall t \in (0,\gamma]: \inf_{s \in [t,\gamma]} \varphi(s) > 0 \tag{12.2}$$

genügt.

Unter den so getroffenen Vereinbarungen ist dann offenbar $0 \in A \cap \overline{A \setminus \{0\}}$ sowie $\varphi(t) > 0$ für $t \in (0,\gamma]$. Außerdem wird für ein $r \in \mathbb{R}^+$ die Menge $B_r := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ symmetrisch und sogar schwach abgeschlossen (vgl. Satz[4.10.7], [9], S.162), so daß wir speziell $\Delta := B_r$ setzen können. Ohne jeweils ausdrücklich darauf aufmerksam machen zu wollen, ist es weiter im Fall $A = \Delta = X$ immer möglich, für Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ die $\{x \in X \mid \|x\| < \frac{1}{k}\}$ zu wählen. Überdies erlauben es die zusätzlich gemachten Einschränkungen nach wie vor, daß selbst Abbildungen $f: \Delta \to X^*$, $f \in N_0(\varphi, A, X^*)$, "schwach nichtlinear" sind. Denn definieren wir etwa für festes $y_0 \in X^*$ $\Omega_k := \{x \in X \mid \|x\| < \frac{1}{k\pi}\}$ $(k \in \mathbb{N})$, $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k \cup \{0\} = \{x \in X \mid \exists k \in \mathbb{N}: \|x\| = \frac{1}{k\pi}\} \cup \{0\}$, $\Delta := X$ und erklären $f: X \to X^*$ über

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{\|x\|} \cdot \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \cdot y_0 & \text{für } x \in X \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

so ist $f \in N_0(\varphi,A,X^*)$ bei beliebigen zugelassenen X und φ.

Als erstes Ergebnis erhalten wir nun den

Satz 12.1. (Lokaler Satz vom FREDHOLM Typ)

Es seien $S,S_0,T,T_0:\Delta\to X^*$, S und S_0 vollstetig, T und T_0 halbstetig und beschränkt, $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(\varphi,A,X^*)$, und für jedes $t \in [0,1]$ erfülle die Abbildung $T+t(T_0-T):\Delta\to X^*$ die Bedingung (S).

(a) Ist noch T_0 ungerade und $d_0(\varphi,A,X^*)(T_0)>0$, dann folgt:

Für jedes λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0 \cup \{0\})$ mit

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T_0-S_0) \tag{12.3}$$

oder

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S) \tag{12.4}$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

(b) Ist noch S_0 ungerade, $d_0(\varphi,A,X^*)(S_0)>0$ und genügt für jedes $t\in[0,1]$ die Abbildung $T_0-tT_0(-\cdot):\Delta\to X^*$ der Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda\neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R}\setminus\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0$ mit

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T_0-S_0)$$

oder

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) < d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S)$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

Beweis:

Ad.(a): Aus $d_0(T_0)>0$ folgt sofort mit Lemma 11.4(b), daß das φ-lokale Spektrum $\Sigma(T_0,S_0)_0$ kompakt ist. Demnach besitzt die Menge $\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$ genau zwei unbeschränkte Komponenten. Sei also λ aus solch einer unbeschränkten Komponente mit (12.3) oder (12.4) beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es ein $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\operatorname{sign}(\mu)=\operatorname{sign}(\lambda)$ und

$$|\lambda+\mu| > \frac{q_0(S_0)}{d_0(T_0)}.$$

Damit definieren wir Abbildungen $H_0, G_0 : [0,1]\times\Delta \to X^*$ durch

$$H_0(t,\cdot) := \begin{cases} \lambda T_0 - S_0 + (1-2t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (\lambda+(2t-1)\mu)T_0 - S_0 & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\forall t\in[0,1]: \; G_0(t,\cdot) := H_0(1,\cdot) - tH_0(1,-\cdot).$$

Wegen der Symmetrie von Δ bzw. A ist G_0 wohldefiniert bzw. mit $f\in Q_0$ auch $f(-\cdot)\in Q_0$ und $q_0(f)=q_0(f(-\cdot))$. Insgesamt erhalten wir daher in jedem der Fälle (12.3) und (12.4) analog zum Beweis von Satz 6.1(a):

$$\forall t\in[0,1]: \; H_0(t,\cdot)\in Q_0 \text{ und } d_0(H_0(t,\cdot)) > 0,$$

$$\forall t\in[0,1]: \; G_0(t,\cdot)\in Q_0 \text{ und } d_0(G_0(t,\cdot)) > 0$$

sowie

$$\forall t_0\in[0,1]: \lim_{\substack{t\to t_0 \\ x\to 0 \\ t\in[0,1], x\in A}} \frac{\|H_0(t,x)-H_0(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0$$

und

$$\forall t_0\in[0,1]: \lim_{\substack{t\to t_0 \\ x\to 0 \\ t\in[0,1], x\in A}} \frac{\|G_0(t,x)-G_0(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Wenden wir nunmehr Lemma 10.5(a) an, so ergibt sich:

$$\exists C_1, R_1 \in \mathbb{R}^+ \forall x\in A, 0<\|x\|\leq R_1 \forall t\in[0,1]: \\ \|H_0(t,x)\| \geq C_1\cdot\varphi(\|x\|)$$

und

$$\exists C_2, R_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x\in A, 0<\|x\|\leq R_2 \forall t\in[0,1]: \\ \|G_0(t,x)\| \geq C_2\cdot\varphi(\|x\|),$$

d.h. für $R:=\min\{R_1,R_2\}\in\mathbb{R}^+$ und $C:=\min\{C_1,C_2\}\in\mathbb{R}^+$ wird

(12.5) $$\forall x\in A, 0<\|x\|\leq R \forall t\in[0,1]: \\ \|H_0(t,x)\| \geq C\cdot\varphi(\|x\|) \leq \|G_0(t,x)\|.$$

Vermöge der Bedingung

$$M_k := \sup_{x\in\partial\Omega_k} \|x\| \to 0 \text{ für } k\to\infty$$

existiert weiter ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit

$$M_{k_0} \leq \min\{R,\gamma\}.$$

Setzen wir demnach $\Omega := \Omega_{k_0}$ sowie

$$m_{k_0} := \inf_{x\in\partial\Omega_{k_0}} \|x\| \text{ und } r := \inf_{s\in[m_{k_0},\gamma]} \varphi(s),$$

dann ist nach Voraussetzung $\Omega\subset\Delta$ offen, beschränkt, symmetrisch, $0\in\Omega$, $\partial\Omega\subset A$, $0<m_{k_0}\leq\|x\|\leq M_{k_0}\leq\min\{R,\gamma\}$ für alle $x\in\partial\Omega$ und $r>0$ (wegen (12.2)). Folglich bekommen wir zusammen mit (12.5):

(12.6) $\quad \forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega\colon \|H_0(t,x)\|, \|G_0(t,x)\| \geq C\varphi(\|x\|) \geq Cr > 0.$

Oberdies sei jetzt $y\in X^*$, $\|y\|<Cr$ beliebig, aber fest gewählt und hierfür $H,G:[0,1]\times\Delta\to X^*$ erklärt mittels

$$H(t,\cdot) := \begin{cases} H_0(t,\cdot)-(1-2t)y \text{ für } 0\leq t\leq\frac{1}{2}, \\ H_0(t,\cdot) \text{ für } \frac{1}{2}<t\leq 1 \end{cases}$$

sowie

$$\forall t\in[0,1]\colon G(t,\cdot) := H(1,\cdot)-tH(1,\cdot) = G_0(t,\cdot).$$

Unter Berücksichtigung von (12.6) erhalten wir dann

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega\colon H(t,x) \neq 0 \neq G(t,x),$$

d.h. die Abbildung $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ erfüllt die Voraussetzungen (v) und (vii) von Satz 5.2. Darüber hinaus entnimmt man dem Beweis von Satz 6.1, daß dies auch für die Punkte (i) bis (iv) und (vi) zutrifft. Demzufolge gibt es ein $x\in\Omega$ mit $H(0,x)=\lambda Tx-Sx-y=0$. Da ferner $y\in X^*$, $\|y\|<Cr$ beliebig war, schließen wir auf

$$(\lambda T-S)(\Omega) \supset \{y\in X^* \mid \|y\|<Cr\}.$$

Schließlich geht speziell für $t=0$ (12.5) über in

$$\forall x\in A, 0<\|x\|\leq R\colon \|H_0(0,x)\| = \|(\lambda T-S)x\| \geq C\cdot\varphi(\|x\|)$$

($C,R\in\mathbb{R}^+$). Insgesamt ist demnach die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

Ad.(b): Die Definition des φ-lokalen Spektrums zusammen mit $d_0(S_0)>0$ impliziert $0\notin\Sigma(T_0,S_0)_0$. Außerdem ist nach Lemma

11.4(a) $\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0)_0$ offen, d.h.

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|<\varepsilon:\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0)_0.$$

Es sei also jetzt $\lambda\neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R}\setminus\Sigma(T_0,S_0)_0$ mit (12.3) oder (12.4) beliebig, aber fest gewählt. Dann gibt es ein $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\operatorname{sign}(\mu)=-\operatorname{sign}(\lambda)$, $0<|\mu|<|\lambda|$ und

$$|\lambda+\mu|\cdot q_0(T_0) < d_0(S_0).$$

Hierfür definieren wir wiederum $H_0,G_0:[0,1]\times\Delta\to X^*$ durch

$$H_0(t,\cdot) := \begin{cases} \lambda T_0-S_0+(1-2t)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) & \text{für } 0\leq t\leq\frac{1}{2}, \\ (\lambda+(2t-1)\mu)T_0-S_0 & \text{für } \frac{1}{2}<t\leq 1 \end{cases}$$

und

$$\forall t\in[0,1]:\ G_0(t,\cdot) := H_0(1,\cdot)-tH_0(1,-\cdot).$$

Damit läßt sich aber unter Berücksichtigung des Beweises von Satz 6.1(b) und analog zum Fall (a) zeigen, daß die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A ist.

q.e.d.

Wir stellen somit fest, daß in Satz 12.1 für keinen der Operatoren S, S_0, T und T_0 irgendwelche Homogenitätseigenschaften erhoben werden und lediglich eine der Abbildungen S_0 und T_0 als ungerade vorausgesetzt wird. Dabei geben die Bedingungen (12.3) und (12.4) an, inwieweit die Operatoren S_0 und T_0 gestört werden dürfen, damit aus den geforderten Eigenschaften an λ hinsichtlich des Spektrums $\Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)_0$ noch die lokale Surjektivität der gestörten Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ folgt. Vor allem sind S und S_0 bzw. T und T_0 keineswegs notwendigerweise φ-lokal äquivalent in Null bez. A. Ferner lassen sich die Einschränkungen an λ nicht abschwächen, dies zeigt die

Bemerkung 12.2.

(a) In Satz 12.1(a) kann die Bedingung "λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}\setminus(\Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$" *nicht* ersetzt werden durch "$\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$".

(b) In Satz 12.1(b) kann die Bedingung "$\lambda \neq 0$ aus der die Null enthaltende Komponente von $\mathbb{R} \setminus \Sigma_{\varphi}^{A}(T_0, S_0)_0$" *nicht* ersetzt werden durch "$\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_{\varphi}^{A}(T_0, S_0)_0 \cup \{0\})$".

Beweis:

Hierzu geben wir zwei einfache Beispiele an (vgl. S.79/80).

Ad.(a): Man setze $X := A := \Delta := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := |x|$ sowie $Tx := T_0 x := x$ für $x \in \mathbb{R}$. Offenbar sind dann S, S_0, T und T_0 aus $Q_0(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $d_0(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})(T_0) = 1 > 0$. Ferner ergibt sich wegen

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda T_0 x - S_0 x = \lambda x - |x|$$

noch $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0, S_0)_0 = \{-1, +1\}$. Weiter sieht man leicht ein, daß dieses Beispiel ebenso den restlichen Voraussetzungen von Satz 12.1(a) genügt. Auf der anderen Seite folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [-1, +1]$:

$$\lambda Tx - Sx = \lambda x - |x| \leq |\lambda| |x| - |x| \leq |x| - |x| = 0.$$

Demnach ist die Abbildung $\lambda T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für kein $\lambda \in [-1, +1]$ lokal surjektiv in Null.

Ad.(b): Hier definieren wir $X := A := \Delta := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := x$ sowie $Tx := T_0 x := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Wiederum sind dann S, S_0, T und T_0 Elemente von $Q_0(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $d_0(1, \mathbb{R}, \mathbb{R})(S_0) = 1 > 0$, und mittels

$$\forall x \in \mathbb{P} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda T_0 x - S_0 x = \lambda |x| - x$$

bekommen wir $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0, S_0)_0 = \{-1, +1\}$. Überdies sind offensichtlich auch die übrigen Bedingungen von Satz 12.1(b) erfüllt. Dagegen erhalten wir

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1: \ \lambda Tx - Sx = \lambda |x| - x \geq |x| - x \geq 0$$

und

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq -1: \ \lambda Tx - Sx = \lambda |x| - x \leq -|x| - x \leq 0.$$

Also ist für kein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-1, +1)$ die Abbildung $\lambda T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal surjektiv in Null.

q.e.d.

Weiterhin gilt als Analogon zu Satz 6.3 der

Satz 12.3. *(Lokaler Satz vom FREDHOLM Typ)*

Es seien $S,S_0,T,T_0:\Delta\to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt und $S,S_0,T,T_0\in Q_0(\varphi,A,X^*)$.

(a) Erfüllt noch für jedes $t\in[0,1]$ die Abbildung $T-tT(-\cdot):\Delta\to X^*$ die Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$ mit

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))<d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T_0-S_0) \tag{12.7}$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

(b) Ist noch S_0 vollstetig, T_0 halbstetig und beschränkt und erfüllt für jedes $t\in[0,1]$ die Abbildung $T-t(T-T_0):\Delta\to X^*$ die Bedingung (S), dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$ mit

$$q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))<d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S) \tag{12.8}$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

Beweis:

Ad.(a): Es sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit (12.7) beliebig, aber fest gewählt. Offenbar ist dann auch $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$, und wir definieren $H_0,G_0:[0,1]\times\Delta\to X^*$ durch

$$\forall t\in[0,1]:\ H_0(t,\cdot):=\lambda T-S$$

und

$$\forall t\in[0,1]:\ G_0(t,\cdot):=H_0(1,\cdot)-tH_0(1,-\cdot).$$

Dem Beweis von Satz 6.3(a) entsprechend läßt sich nun Lemma 10.5(a)"$\Rightarrow$" sowohl auf H_0 als auch auf G_0 anwenden, woraus wir auf

$$\exists C,R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A,0<\|x\|\le R\forall t\in[0,1]:\ \|H_0(t,x)\|\ge C\cdot\varphi(\|x\|)\le\|G_0(t,x)\| \tag{12.9}$$

schließen können. Hierfür existiert wie beim Beweis von Satz 12.1(a) ein $k_0\in\mathbb{N}$ mit

$$M_{k_0}:=\sup_{x\in\partial\Omega_{k_0}}\|x\|\le\min\{R,\gamma\}.$$

Setzen wir also wieder $\Omega:=\Omega_{k_0}$ sowie

$$m_{k_0} := \inf_{x\in\partial\Omega_{k_0}} \|x\| \text{ und } r := \inf_{s\in[m_{k_0},\gamma]} \varphi(s),$$

so ist nach Voraussetzung $\Omega\subset\Delta$ offen, beschränkt, symmetrisch, $0\in\Omega$, $\partial\Omega\subset A$, $0<m_{k_0}\leq\|x\|\leq M_{k_0}\leq\min\{R,\gamma\}$ für alle $x\in\partial\Omega$ und $r>0$ (wegen (12.2)). Folglich ergibt sich zusammen mit (12.9):

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega:\ \|H_0(t,x)\|,\|G_0(t,x)\|\geq C\varphi(\|x\|)\geq Cr>0.$$

Damit läßt sich aber unter Berücksichtigung des Beweises von Satz 6.3(a) in völliger Analogie zum Beweis von Satz 12.1(a)

$$(\lambda T-S)(\Omega)\supset\{y\in X^*\mid \|y\|<Cr\}$$

zeigen (mit $H(t,\cdot):=H_0(t,\cdot)-y$, $t\in[0,1]$). Wegen $H_0(0,\cdot)=\lambda T-S$ bedeutet dies zusammen mit (12.9), daß die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A ist.

Ad.(b): Es sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit (12.8) beliebig, aber fest gewählt. Wegen

$$d_0(\lambda T_0-S_0)\geq d_0(\lambda T-S)-q_0(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))>0$$

ist dann auch $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$, und wir definieren zunächst $H_0,G_0:[0,1]\times\Delta\to X^*$ über

$$\forall t\in[0,1]:\ H_0(t,\cdot) := \lambda T-S-t(\lambda(T-T_0)+(S_0-S))$$

und

$$\forall t\in[0,1]:\ G_0(t,\cdot) := H_0(1,\cdot)-tH_0(1,-\cdot).$$

Vergleichbar mit dem Beweis von Satz 6.3(b) läßt sich daran anschließend in der für den lokalen Fall nun schon charakteristischen Art und Weise auf die Behauptung schließen (mit $H(t,\cdot):=H_0(t,\cdot)-(1-t)y$, $t\in[0,1]$).

q.e.d.

Wie man dem Beweis von Satz 12.3 entnimmt, folgt aus $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und einer der Bedingungen (12.7) oder (12.8) bereits $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$. Dennoch haben wir - in Anlehnung an Satz 6.3 - unser letztes Ergebnis ganz bewußt wie angegeben formuliert. Es wird dadurch besser erkennbar, daß die Abschwächung der Einschränkungen an den Parameter λ, wie sie nach der Bemerkung 12.2 für den Satz 12.1 nicht möglich ist, gelingt, wenn wir nicht nur jeweils einen der Operatoren S_0 und T_0 als ungerade voraussetzen, sondern beide.

Mit Hilfe von Satz 12.3 gewinnen wir jetzt ohne große Mühe zwei weitere Resultate, vor allem aber eine lokale FREDHOLM-sche Alternative. Zuvor sei auch an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, daß für eine gegebene Abbildung $f:\Delta\to X^*$ (Δ ist symmetrisch) der Operator $f^-:\Delta\to X^*$ definiert ist durch

$$\forall x\in\Delta:\quad f^-(x) := -f(-x).$$

Korollar 12.4. *(Lokaler Satz vom FREDHOLM Typ)*

Es seien $S,T:\Delta\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $S,T\in Q_0(\varphi,A,X^*)$, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T-\frac{t}{2}(T-T^-):\Delta\to X^*$ die Bedingung (S). Dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit

$$\tfrac{1}{2}q_0(\varphi,A,X^*)(\lambda(T-T^-)+(S^--S)) < d_0(\varphi,A,X^*)(\lambda T-S)$$

ist die Abbildung $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

Beweis:

Erklären wir Operatoren S_0 und T_0 von Δ in X^* über

$$S_0 := \tfrac{1}{2}(S+S^-) \text{ und } T_0 := \tfrac{1}{2}(T+T^-),$$

so ergibt sich die Behauptung mit Satz 12.3(b) analog zum Beweis von Korollar 6.4.

q.e.d.

Korollar 12.5. *(Lokale FREDHOLMsche Alternative)*

Es seien $S,S_0,T,T_0:\Delta\to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $S,S_0,T,T_0\in Q_0(\varphi,A,X^*)$, $S\not\sim S_0$, $T\not\sim T_0$, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T-tT(-\cdot):\Delta\to X^*$ die Bedingung (S). Dann folgt:

Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind die vier Aussagen

(a) $\lambda\notin\Sigma^A_\varphi(T_0,S_0)_0$,

(b) $\lambda\notin\Sigma^A_\varphi(T,S)_0$,

(c) $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ ist gleichmäßig φ-lokal regulär in Null bez. A

und

(d) $\lambda T-S:\Delta\to X^*$ ist gleichmäßig φ-lokal regulär surjektiv in Null bez. A

äquivalent.

Beweis:

Es sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig, aber fest gewählt. Der Beweis erfolgt nun in vier Schritten.

(i) Wir zeigen: (a) $\Rightarrow$ (d). Nach Voraussetzung ist also λ aus $\mathbb{R}\setminus(\Sigma(T_0,S_0)_0\cup\{0\})$ und damit insbesondere $d_0(\lambda T_0-S_0)>0$. Zusammen mit $S\,\&\,S_0$ und $T\,\&\,T_0$ ergibt sich daher auch

$$q_0(\lambda(T-T_0)+(S_0-S)) \le |\lambda| q_0(T-T_0) + q_0(S_0-S)$$
$$= 0 < d_0(\lambda T_0-S_0).$$

Demnach liefert Satz 12.3(a) das Gewünschte.

(ii) Wir zeigen: (d) $\Rightarrow$ (c). Dies ist trivialerweise erfüllt.

(iii) Wir zeigen: (c) $\Leftrightarrow$ (b). Diese Behauptung erhalten wir unmittelbar mit Lemma 10.5(a).

(iv) Wir zeigen: (b) $\Leftrightarrow$ (a). Diese Aussage bekommen wir direkt aus Lemma 11.7(a).

q.e.d.

Mit Korollar 12.5 steht uns eine lokale FREDHOLMsche Alternative zur Verfügung, bei der wir nach wie vor auf jegliche Homogenitätseigenschaften der Operatoren S, S_0, T und T_0 verzichten können. Ferner erhalten wir offenbar eine Variante von Korollar 12.4 bzw. Korollar 12.5, wenn wir an entsprechender Stelle der zugehörigen Beweise statt des Teiles (b) bzw. (a) von Satz 12.3 den Teil (a) bzw. (b) heranziehen.

Weitergehende Aussagen lassen sich allerdings unter den Erfordernissen von Korollar 12.5 nicht machen. Dies zeigt die

Bemerkung 12.6.

Unter den Voraussetzungen von Korollar 12.5 sind die beiden folgenden Aussagen *falsch*:

(a) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: [$\lambda T-S:\Delta\to X^*$ ist lokal surjektiv in Null] $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda\notin\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0$.

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_{\varphi}^{A}(T_0,S_0)_0 \cup \{0\}) \exists r \in \mathbb{R}^+$:

$$\lambda T - S\big|_{\{x \in A \mid \|x\| \leq r\}} \text{ ist injektiv.}$$

Beweis:

Wir belegen die Behauptungen durch Angabe zweier Beispiele.

Ad.(a): Es sei $X := A := \Delta := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $S_0 x := Tx := T_0 x := x$ sowie $Sx := x - x^2 \operatorname{sign}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Offenbar sind dann S, S_0, T und T_0 Elemente aus $Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $S \mathbin{\&} S_0$ und $T \mathbin{\&} T_0$. Ferner ist leicht einzusehen, daß unser Beispiel auch den übrigen Anforderungen von Korollar 12.5 genügt. Nun ist aber einerseits wegen

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda T_0 x - S_0 x = (\lambda - 1)x$$

$\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0,S_0)_0 = \{1\}$, während andererseits aus

$$\forall x \in \mathbb{R}: 1 \cdot Tx - Sx = x^2 \operatorname{sign}(x)$$

$(1 \cdot T - S)[(-1,+1)] = (-1,+1)$ folgt. Zwangsläufig ist daher die Abbildung $1 \cdot T - S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig 1-lokal regulär in Null bez. $\mathbb{R}$.

Ad.(b): Hier definieren wir $X := A := \Delta := \mathbb{R}$, $\varphi(t) := t$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $Sx := S_0 x := 0$ für $x \in \mathbb{R}$ sowie

$$Tx := T_0 x := \begin{cases} \pi x(2+\cos(\frac{1}{x})) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wiederum sind jetzt S, S_0, T und T_0 Elemente aus $Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $S \mathbin{\&} S_0$ und $T \mathbin{\&} T_0$. Weiterhin ist klar, daß für diesen konkreten Fall überdies die restlichen Bedingungen von Korollar 12.5 erfüllt sind. Außerdem folgt aus

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda T_0 x - S_0 x = \lambda \pi x(2+\cos(\tfrac{1}{x}))$$

noch $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0,S_0)_0 = \{0\}$. Erklären wir dagegen für jedes $n \in \mathbb{N}$ x_n, y_n und z_n aus $\mathbb{R}$ durch

$$x_n := [(2n-\tfrac{1}{2})\pi]^{-1}, \; y_n := (2n\pi)^{-1} \text{ und } z_n := [(2n+1)\pi]^{-1},$$

so ergibt sich für $\lambda := 1 \in \mathbb{R} \setminus (\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T_0,S_0)_0 \cup \{0\})$:

$$\lambda T x_n - S x_n = \frac{2}{2n-\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{3n}, \; \lambda T y_n - S y_n = \frac{3}{2n} > \lambda T x_n - S x_n$$

und

$$\lambda T z_n - S z_n = \frac{1}{2n+1} < \lambda T x_n - S x_n .$$

Demnach existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_n \in \mathbb{R}$ mit

$$z_n < \xi_n < y_n < x_n \quad \text{und} \quad \lambda T x_n - S x_n = \lambda T \xi_n - S \xi_n .$$

q.e.d.

Abschließend betrachten wir noch den Fall zweier Operatoren S_0 und T_0, welche gewisse Homogenitätseigenschaften besitzen. Hierfür läßt sich dann eine lokale FREDHOLMsche Alternative im Sinne der üblichen Definition eines Eigenwertes herleiten. Genauer gilt das

Korollar 12.7. (Lokale FREDHOLMsche Alternative)

Es sei $r \in \mathbb{R}^+$, $B_r := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ und $B_r \supset (A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k)$.
Ferner seien $S, S_0, T, T_0 : B_r \to X^*$, S_0 und T_0 ungerade, S vollstetig, T halbstetig und beschränkt, $a \in \mathbb{R}^+$, $S, S_0, T, T_0 \in Q_0(a, A, X^*)$, $S \mathfrak{L} S_0$, $T \mathfrak{L} T_0$, und für jedes $t \in [0,1]$ genüge die Abbildung $T - tT(-\cdot) : B_r \to X^*$ der Bedingung (S).
Erfüllt schließlich auch T_0 die Bedingung (S) und ist S_0 vollstetig, T_0 halbstetig und gilt für jedes $t \in [0,1]$ und alle $x \in B_r$

(12.10) $\quad S_0(tx) = t^a S_0 x$ sowie $T_0(tx) = t^a T_0 x$,

dann folgt:

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind die vier Aussagen

(a) $\lambda \notin \sigma^A(T_0, S_0)$,

(b) $\lambda \notin \Sigma_a^A(T,S)_0$,

(c) $\lambda T - S : B_r \to X^*$ ist gleichmäßig a-lokal regulär in Null bez. A und

(d) $\lambda T - S : B_r \to X^*$ ist gleichmäßig a-lokal regulär surjektiv in Null bez. A

äquivalent.

Beweis:

Nach Korollar 12.5 genügt es zu zeigen:

$$\Sigma_a^A(T_0, S_0)_0 \setminus \{0\} = \sigma^A(T_0, S_0) \setminus \{0\} .$$

Sei also zunächst $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0,S_0)_0 \setminus \{0\}$ und demnach

$$d_0(a,A,X^*)(\lambda T_0 - S_0) = 0.$$

Dann gibt es eine Folge (x_n) in $A \setminus \{0\}$ $(\subset B_r)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|\lambda T_0 x_n - S_0 x_n\|}{\|x_n\|^a} = 0.$$

Setzen wir daher $v_n := r\frac{x_n}{\|x_n\|}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die $\|v_n\| = r$, $v_n \in B_r$, $0 < \frac{\|x_n\|}{r} \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und wegen (12.10)

$$\|\lambda T_0 v_n - S_0 v_n\| = r^a \frac{\|\lambda T_0(\frac{\|x_n\|}{r} v_n) - S_0(\frac{\|x_n\|}{r} v_n)\|}{\|\frac{\|x_n\|}{r} v_n\|^a}$$

$$= r^a \frac{\|\lambda T_0 x_n - S_0 x_n\|}{\|x_n\|^a} \to 0$$

für $n \to \infty$. Ferner erfüllt die Abbildung $\lambda T_0 - S_0 : B_r \to X^*$ $(\lambda \neq 0)$ unter den gemachten Voraussetzungen vermöge Lemma[1.2], [77], S.19, die Bedingung (S). Insgesamt erhalten wir somit analog zum Beweis von Lemma 4.8(c) die Existenz eines $v_0 \in B_r$, $\|v_0\| = r$, mit $\lambda T_0 v_0 - S_0 v_0 = 0$. Hierzu wiederum gibt es (vgl. S.73) ein t_1 aus $(0,1]$, für das gilt:

$$0 \neq t_1 v_0 \in \partial\Omega_1 \subset A \subset B_r$$

und

$$\lambda T_0(t_1 v_0) - S_0(t_1 v_0) = t_1^a(\lambda T_0 v_0 - S_0 v_0) = 0.$$

Dies bedeutet aber $\lambda \in \sigma^A(T_0,S_0) \setminus \{0\}$.

Umgekehrt sei nun $\lambda \in \sigma^A(T_0,S_0) \setminus \{0\}$, d.h.

(12.11) $\quad \exists x_0 \in (A \setminus \{0\}) \subset B_r : \lambda T_0 x_0 - S_0 x_0 = 0.$

Wegen der Gestalt der Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ existiert (vgl. S.73) weiter eine Folge (t_k) in $\mathbb{R}^+$ mit

(12.12) $\quad \forall k \in \mathbb{N} : 0 \neq t_k x_0 \in \partial\Omega_k \subset A \subset B_r.$

Oberdies bekommen wir aus

$$\|t_k x_0\| \leq \sup_{x \in \partial\Omega_k} \|x\| = M_k \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

noch, daß der

(12.13) $\lim_{k\to\infty} \|t_k x_0\| = 0$ bzw. der $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$

ist. Folglich ergibt sich aus (12.12), (12.13), (12.10) und (12.11):

$$0 \leq d_0(a,A,X^*)(\lambda T_0 - S_0) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\|(\lambda T_0 - S_0)(t_k x_0)\|}{\|t_k x_0\|^a}$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \frac{t_k{}^a \|\lambda T_0 x_0 - S_0 x_0\|}{t_k{}^a \|x_0\|^a} = 0.$$

Also ist $\lambda \in \Sigma_a^A(T_0,S_0)_0 \setminus \{0\}$.

q.e.d.

§ 13. VERZWEIGUNGSPUNKTE

Nachfolgend untersuchen wir in erster Linie das Existenzproblem für Verzweigungspunkte eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren S und T aus einem geeigneten Raum Q_0. Hierzu wird zunächst noch einmal präzise formuliert, welche ausgezeichneten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ als Verzweigungspunkte zu definieren sind. Im Anschluß daran ergeben sich einige charakteristische Eigenschaften derselben. Schließlich schränken wir uns im zweiten Teil dieses Paragraphen auf den Dualraum als Bildraum ein und beweisen hierfür unser Hauptergebnis (Satz 13.7), das unter passenden Voraussetzungen die Existenz (mindestens) eines positiven und (mindestens) eines negativen Verzweigungspunktes des Paares (T,S) gewährleistet.

§ 13.1. DEFINITION UND CHARAKTERISIERUNG

Im ganzen Abschnitt seien X und Y reelle normierte Räume, $A \subset X$, $0 \in A \cap \overline{A \setminus \{0\}}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\varphi(t)>0$ für alle $t \in (0,\gamma]$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Schreiben wir ferner an einer Stelle a statt φ, so soll darunter stets die durch $\varphi(t) := t^a$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ definierte Funktion $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ verstanden werden.

Definition 13.1.

Es seien $S,T: A \to Y$ mit $S(0)=T(0)=0$.

(a) Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt genau dann *Verzweigungspunkt (VP) des Paares (T,S) (bzw. der Gleichung $\lambda Tx - Sx = 0$) bez. A*, wenn gilt:

$$\exists (\lambda_n) \subset \mathbb{R}, \lambda_n \to \lambda \; \exists (x_n) \subset A \setminus \{0\}, x_n \to 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \quad \lambda_n T x_n - S x_n = 0.$$

(b) $\Gamma_\varphi^A(T,S)_0 := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist VP des Paares } (T,S) \text{ bez. } A\}$.

Als erstes geben wir jetzt gewisse, zwischen Verzweigungspunkten einerseits und Eigenwerten bzw. φ-lokalen Eigenwerten andererseits, bestehende Zusammenhänge an.

Lemma 13.2.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(\varphi,A,Y)$ mit $S \mathrel{\&} S_0$ und $T \mathrel{\&} T_0$. Dann folgt:

$$\Gamma_\varphi^A(T,S)_0 \subset \Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0.$$

(b) Es seien $S,T: A \to Y$ mit $S(0)=T(0)=0$. Dann folgt:

$$\Gamma_\varphi^A(T,S)_0 \subset \overline{\sigma_\varphi^A(T,S)}.$$

Beweis:

Ad.(a): Es sei $\lambda \in \Gamma_\varphi^A(T,S)_0$. Dann gibt es Folgen $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset A \setminus \{0\}$ mit $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \to 0$ und $\lambda_n T x_n - S x_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Demnach erhalten wir:

$$0 \leq d_0(\varphi,A,Y)(\lambda T - S) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\| \lambda T x_n - S x_n \|}{\varphi(\| x_n \|)}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{\|\lambda Tx_n - Sx_n - (\lambda_n Tx_n - Sx_n)\|}{\varphi(\|x_n\|)}$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(|\lambda-\lambda_n| \frac{\|Tx_n\|}{\varphi(\|x_n\|)}\right) = 0,$$

denn $T\in Q_0(\varphi,A,Y)$. Also folgt $\lambda\in\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$. Nach Lemma 11.7(a) ist aber $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0=\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0$ und daher die Behauptung bewiesen.

Ad.(b): Ergibt sich direkt aus der Definition von $\Gamma^A(T,S)_0$.

q.e.d.

Die Umkehrungen der beiden letzten Aussagen sind allerdings nicht allgemeingültig. Dies zeigt das

Lemma 13.3.

(a) Es seien $S,S_0,T,T_0\in Q_0(\varphi,A,Y)$ mit $S\mathrel{\&} S_0$ und $T\mathrel{\&} T_0$. Dann folgt:

$$\lambda\in\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0 \;\Rightarrow\; \lambda\in\Gamma^A(T,S)_0.$$

(b) Es seien $S,T:A\to Y$ mit $S(0)=T(0)=0$. Dann folgt:

$$\lambda\in\sigma^A(T,S) \;\Rightarrow\; \lambda\in\Gamma^A(T,S)_0.$$

Beweis:

Ad.(a): Wir setzen $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=S_0x:=Tx:=T_0x:=x^2$ für $x\in\mathbb{R}$. Dann sind einerseits $S,T\in Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0=\mathbb{R}$ und $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\{1\}$ (vgl. S.163/164), während aber andererseits nach Lemma 13.2(b) $\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)_0\subset\overline{\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)}$ gilt.

Ad.(b): Hier definieren wir $X:=Y:=A:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=S_0x:=x$ sowie $Tx:=T_0x:=x^2$ für $x\in\mathbb{R}$. Wiederum sind S und T Elemente von $Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$, und es wird $\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0=\phi$ sowie $\sigma^{\mathbb{R}}(T,S)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (vgl. S.164). Jedoch ist $\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)_0\subset\Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0$, wie Lemma 13.2(a) ergibt.

q.e.d.

Schließlich sind unter geeigneten Voraussetzungen Verzweigungspunkte auch Eigenwerte im üblichen Sinne.

Lemma 13.4.

(a) Es sei A abgeschlossen, I_A die Identität auf A, $S,S_0,T \in Q_0(1,A,X)$, $S \& S_0$, $T \& I_A$ und

$$\exists r,R \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, 0<\|x\| \leq r: \quad R\frac{x}{\|x\|} \in A \text{ und } S_0(R\frac{x}{\|x\|}) = \frac{R}{\|x\|} S_0 x.$$

Ferner sei $S_0: A \to X$ vollstetig. Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S)_0 \setminus \{0\} \subset \sigma^A(I_A,S_0) \setminus \{0\}.$$

(b) Es sei X ein reeller reflexiver BANACH-Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$, A schwach abgeschlossen, $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(a,A,X^*)$, $S \& S_0$, $T \& T_0$ und

$$\exists r,R \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A, 0<\|x\| \leq r: \quad R\frac{x}{\|x\|} \in A,\ S_0(R\frac{x}{\|x\|}) = \frac{R^a}{\|x\|^a} S_0 x \text{ und } T_0(R\frac{x}{\|x\|}) = \frac{R^a}{\|x\|^a} T_0 x.$$

Ferner erfülle die Abbildung $\lambda T_0 - S_0: A \to X^*$ die Bedingung (S) und sei halbstetig. Dann folgt:

$$\lambda \in \Gamma^A(T,S)_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \sigma^A(T_0,S_0).$$

Beweis:

Ad.(a): Nach Lemma 13.2(a) ist $\Gamma^A(T,S)_0 \subset \Sigma_1^A(T,S)_0$, und die Behauptung ergibt sich mit Lemma 11.8(b).

Ad.(b): Analog zum Fall (a) wird hier der Beweis mit Lemma 13.2(a) und Lemma 11.8(c) geführt.

q.e.d.

Darüber hinaus formulieren wir abschließend noch zwei topologische Eigenschaften der Menge $\Gamma^A(T,S)_0$.

Lemma 13.5.

(a) Es seien $S,T: A \to Y$ mit $S(0)=T(0)=0$. Dann folgt:

$\Gamma^A(T,S)_0$ ist abgeschlossen.

(b) Es seien $S,S_0,T,T_0 \in Q_0(\varphi,A,Y)$ mit $S \& S_0$, $T \& T_0$ und $d_0(\varphi,A,Y)(T_0)>0$. Dann folgt:

$\Gamma^A(T,S)_0$ ist kompakt.

Beweis:

Ad.(a): Für $\Gamma^A(T,S)_0=\phi$ ist die Aussage trivial. Sei also (λ_k) eine Folge aus $\Gamma^A(T,S)_0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ und der

$$(13.1)\qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda.$$

Dann gibt es zu jedem $k\in\mathbb{N}$ Folgen $(\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ und $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A\setminus\{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^n=\lambda_k,\quad \lim_{n\to\infty}x_k^n=0$$

und

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \lambda_k^nTx_k^n-Sx_k^n=0.$$

Insbesondere haben wir somit erhalten:

$$(13.2)\qquad \forall k\in\mathbb{N}\exists n_k\in\mathbb{N}:$$

$$|\lambda_k^{n_k}-\lambda_k|<\tfrac{1}{k},\quad 0<\|x_k^{n_k}\|\leq\tfrac{1}{k}\quad\text{und}\quad \lambda_k^{n_k}Tx_k^{n_k}-Sx_k^{n_k}=0.$$

Demnach ergibt sich für jedes $k\in\mathbb{N}$:

$$|\lambda-\lambda_k^{n_k}|\leq|\lambda-\lambda_k|+|\lambda_k-\lambda_k^{n_k}|<|\lambda-\lambda_k|+\tfrac{1}{k}\to 0$$

für $k\to\infty$ nach (13.1). Daher ist wegen (13.2) $\lambda\in\Gamma^A(T,S)_0$.

Ad.(b): Unter den gemachten Voraussetzungen ist $\Sigma_\varphi^A(T_0,S_0)_0$ nach Lemma 11.4(b) kompakt. Zusammen mit Teil (a) und Lemma 13.2(a) folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

§ 13.2. EXISTENZ

Das wichtigste Ergebnis dieses dreizehnten Paragraphen ist - wie bereits eingangs erwähnt - ein Satz über die Existenz von Verzweigungspunkten eines Paares (T,S) nichtlinearer Operato-

ren S und T aus einem geeigneten Raum Q_0. Zum Beweis dieser Aussage können wir zwar Lemma 7.8 ohne Änderung heranziehen, benötigen aber noch zusätzlich eine lokale Version von Lemma 7.6. Dabei setzen wir für den Rest dieses Abschnitts folgendes voraus (vgl. die §§ 5, 7 und 12):

Es sei X ein reeller, reflexiver und separabler BANACH-Raum und (Ω_k) eine Folge von Teilmengen von X mit

$$\forall k \in \mathbb{N}:$$
$$\Omega_k \text{ ist offen, beschränkt, symmetrisch und } 0 \in \Omega_k.$$

Darüber hinaus fordern wir, daß für

$$M_k := \sup_{x \in \partial\Omega_k} \|x\| \quad (k \in \mathbb{N})$$

der

$$\lim_{k \to \infty} M_k = 0 \tag{13.3}$$

ist. Weiter sei A eine symmetrische Teilmenge von X mit

$$0 \in A \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial\Omega_k,$$

Δ eine symmetrische und schwach abgeschlossene Teilmenge von X mit

$$\Delta \supset (A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k),$$

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion, die der Bedingung

$$\forall t \in (0,\gamma]: \quad \inf_{s \in [t,\gamma]} \varphi(s) > 0 \tag{13.4}$$

genügt. Oberdies bezeichne $D=\{d_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare und in X dicht liegende Teilmenge von X.

Damit definieren wir Unterräume X_n $(n \in \mathbb{N})$ von X durch

$$X_n := [d_1, \ldots, d_n]$$

und Abbildungen $i_n: X_n \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ vermöge

$$\forall x \in X_n: \quad i_n(x) := x.$$

Schließlich sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $i_n^*: X^* \to X_n^*$ der zu i_n duale Operator und h_n ein linearer Homöomorphismus von X_n^* auf X_n.

Als lokale Version von Lemma 7.6 gilt nun das

Lemma 13.6.

Es seien $S,T\in Q_0(\varphi,A,X^*)$, $d_0(\varphi,A,X^*)(S)>0$ und $l\in\mathbb{R}^+$ mit

$$l\cdot q_0(\varphi,A,X^*)(T) < d_0(\varphi,A,X^*)(S).$$

Dann folgt:

$$\exists R\in\mathbb{R}^+\forall r\in(0,R]:\quad \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\le 1\\ x\in A,\, r\le\|x\|\le R}} \|\lambda Tx-Sx\| > 0.$$

Beweis:

Wir definieren eine Abbildung $H:[0,1]\times A\to X^*$ durch

$$\forall t\in[0,1]:\ H(t,\cdot) := (2t-1)lT-S\in Q_0.$$

Der Wahl von l entsprechend ist dann für jedes $t\in[0,1]$

$$d_0(H(t,\cdot)) \ge d_0(S)-|(2t-1)|lq_0(T) \ge d_0(S)-lq_0(T) > 0.$$

Ferner wird wegen

$$H(t,\cdot)-H(t_0,\cdot) = 2(t-t_0)lT\quad (t,t_0\in[0,1])$$

auch für alle $t_0\in[0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ x\to 0\\ t\in[0,1],x\in A}} \frac{\|H(t,x)-H(t_0,x)\|}{\varphi(\|x\|)} = 0,$$

denn $T\in Q_0$. Insgesamt ergibt sich also mit Lemma 10.5(a):

$$\exists C,R\in\mathbb{R}^+\forall x\in A,0<\|x\|\le R\forall t\in[0,1]:$$
$$\|(2t-1)lTx-Sx\| = \|H(t,x)\| \ge C\cdot\varphi(\|x\|).$$

Dabei können wir o.B.d.A. noch $R\le\gamma$ annehmen. Ist jetzt ein r aus $(0,R]$ beliebig, aber fest gewählt, so haben wir demnach erhalten:

$$\forall x\in A, r\le\|x\|\le R\le\gamma\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\le 1:$$
$$\|\lambda Tx-Sx\| \ge C\cdot\varphi(\|x\|) \ge C\cdot\inf_{s\in[r,\gamma]}\varphi(s) > 0$$

nach (13.4).

q.e.d.

Wie der Beweis zeigt, bleibt Lemma 13.6 auch für einen beliebigen Raum $Q_0(\psi,B,Y)$ mit

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall t \in (0,\delta]: \quad \inf_{s\in[t,\delta]} \psi(s) > 0$$

gültig.

Damit sind bereits alle Vorbereitungen getroffen, die wir zum Beweis unserer Aussage über die Existenz von Verzweigungspunkten benötigen. Es gilt der

Satz 13.7. (Existenzsatz für Verzweigungspunkte)

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $S,T:\Delta\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig, beschränkt und ungerade, $S,T\in Q_0(\varphi,A,X^*)$, $d_0(\varphi,A,X^*)(S)>0$ und $d_0(\varphi,A,X^*)(T)>0$. Ferner erfülle T die Bedingung (S). Dann folgt:

$$\Gamma^A(T,S)_0 \cap \mathbb{R}^+ \neq \phi \neq \Gamma^A(T,S)_0 \cap \mathbb{R}^-.$$

Beweis:

Zunächst wählen wir ein $l\in\mathbb{R}^+$ mit $l\cdot q_0(T)<d_0(S)$ aus und erhalten vermöge Lemma 13.6:

$$(13.5) \qquad \exists R \in \mathbb{R}^+ \forall r \in (0,R]: \quad \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq l \\ x\in A, r\leq \|x\|\leq R}} \|\lambda Tx - Sx\| > 0.$$

Berücksichtigt man jetzt noch unsere generellen Voraussetzungen an die Mengen Ω_k $(k\in\mathbb{N})$, so

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0:$$
$$0 < m_k := \inf_{x\in\partial\Omega_k} \|x\| \leq \sup_{x\in\partial\Omega_k} \|x\| =: M_k \leq R.$$

Da außerdem $\partial\Omega_k$ $(k\in\mathbb{N})$ eine Teilmenge von A ist, ergibt sich zusammen mit (13.5):

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0: \ \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\leq l \\ x\in\partial\Omega_k}} \|\lambda Tx - Sx\| > 0,$$

d.h.

$$(13.6) \qquad \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \exists r_k \in \mathbb{R}^+ \forall \lambda \in [-1,1] \forall x \in \partial\Omega_k \forall y \in X^*, \|y\| \leq r_k: \ \lambda Tx - Sx + y \neq 0.$$

Nun werden wir zeigen, daß das Paar (T,S) einen positiven VP bez. A besitzt (die Existenz eines negativen weist man analog nach). Hierzu seien $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ mit

(13.7) $\quad 0 < \lambda_1 \leq 1 < \lambda_2$ und $\lambda_2 > \dfrac{q_0(S)}{d_0(T)}$.

beliebig, aber ein für allemal fest bestimmt.

Ist darüber hinaus ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ beliebig, aber fest gewählt, dann bekommen wir nach (13.6) und Lemma 7.8 (dort setzen wir $\Omega := \Omega_k$ und $M := r_k$):

(13.8) $\quad \exists n_1(k) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1(k)\colon \deg(h_n i_n^*(\lambda_1 T - S) i_n, \Omega_k \cap X_n, 0) = 0.$

Weiter definieren wir eine Abbildung $H\colon [0,1] \times \Delta \to X^*$ durch

$$\forall t \in [0,1]\colon H(t,\cdot) := (\lambda_1 + t(\lambda_2 - \lambda_1))T - S$$

und entnehmen dem Beweis von Satz 7.9 bzw. Lemma 7.7, daß H die Voraussetzungen (i) bis (iv) von Satz 5.2 (mit $\Omega := \Omega_k$) erfüllt und wollen sehen, ob dies auch für die Bedingungen (vi) und (vii) zutrifft.

Dafür betrachten wir $G\colon [0,1] \times \Delta \to X^*$ erklärt über

$$\forall t \in [0,1]\colon G(t,\cdot) := H(1,\cdot) - tH(1,-\cdot).$$

Da T ungerade ist, erhält man für G die Darstellung

$$\forall t \in [0,1]\colon G(t,\cdot) = (1+t)\lambda_2 T - S + tS(-\cdot)$$

und liest hieran wie gewohnt ab, daß $G(t,\cdot)\colon \Delta \to X^*$ $(t \in [0,1])$ der Bedingung (S) genügt, d.h. der Punkt (vi) ist bereits verifiziert. Überdies ergibt sich für jedes $t \in [0,1]$ aus der Symmetrie von A zusammen mit $S, T \in Q_0$ noch $G(t,\cdot) \in Q_0$ und

$$\begin{aligned} d_0(G(t,\cdot)) &\geq (1+t)\lambda_2 d_0(T) - q_0(-S + tS(-\cdot)) \\ &\geq (1+t)\lambda_2 d_0(T) - q_0(S) - tq_0(S) \\ &= (1+t)(\lambda_2 d_0(T) - q_0(S)) > 0 \end{aligned}$$

nach (13.7). Schließlich ist wegen

$$G(t,\cdot) - G(t_0,\cdot) = (t - t_0)(\lambda_2 T + S(-\cdot)) \quad (t, t_0 \in [0,1])$$

sowie $\lambda_2 T + S(-\cdot) \in Q_0$ auch für alle $t_0 \in [0,1]$ der

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ x \to 0 \\ t \in [0,1], x \in A}} \frac{\| G(t,x) - G(t_0,x) \|}{\varphi(\|x\|)} = 0.$$

Haben wir also o.B.d.A. k_0 von vornherein genügend groß gewählt, so erfüllt H nach Lemma 10.5(b), (13.3) und mittels $\partial\Omega_k \subset A$ auch die Voraussetzung (vii).

Nehmen wir jetzt an, der Operator $H:[0,1]\times\Delta\to X^*$ genüge außerdem der Bedingung (v) von Satz 5.2, d.h.

$$\forall t\in[0,1]\forall x\in\partial\Omega_k:\ H(t,x)\neq 0,$$

so wenden wir diesen an und zusammen mit $H(0,\cdot)=\lambda_1 T-S$ folgt:

$$\exists n_0(k)\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0(k):\ \deg(h_n i_n^*(\lambda_1 T-S)i_n,\Omega_k\cap X_n,0)\neq 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (13.8), und es hat sich ergeben:

$$\forall k\in\mathbb{N}, k\geq k_0\ \exists t_k\in[0,1]\exists x_k\in\partial\Omega_k:$$
$$0=H(t_k,x_k)=(\lambda_1+t_k(\lambda_2-\lambda_1))Tx_k-Sx_k.$$

Ferner ist dabei wegen der geforderten Gestalt der Ω_k $x_k\neq 0$ ($k\in\mathbb{N}$, $k\geq k_0$) und der

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Wählen wir demnach eine konvergente Teilfolge (t_{k_i}) der Folge $(t_k)_{k\geq k_0}$ aus, etwa mit

$$\lim_{i\to\infty} t_{k_i} =: \tilde{t}\in[0,1],$$

dann ist

$$\lambda_1+\tilde{t}(\lambda_2-\lambda_1)\in[\lambda_1,\lambda_2]\subset\mathbb{R}^+$$

offenbar ein positiver VP des Paares (T,S) bez. $\bigcup_{k=1}^{\infty}\partial\Omega_k\subset A$.

q.e.d.

Mit Satz 13.7 haben wir ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Verzweigungspunkten eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren erhalten, ohne dabei die FRÉCHET-Differenzierbarkeit von S und T im Nullpunkt zu fordern bzw. Vielfachheitseigenschaften des Parameters λ vorauszusetzen (vgl. Einleitung). Ein vergleichbares Ergebnis für Abbildungen, welche eine geeignete Teilmenge des zugrundeliegenden Raumes X in den zugehörigen Dualraum X^* abbilden, ist uns nicht bekannt.

Bemerkung 13.8.

In Satz 13.7 kann auf die Bedingung "$\dim(X)=\infty$" *nicht* verzichtet werden.

Beweis:

Wir belegen die Behauptung durch ein einfaches Beispiel. Hierzu sei $X:=A:=\Delta:=\mathbb{R}$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$ und $Sx:=Tx:=x$ für $x\in\mathbb{R}$. Offensichtlich sind dann $S,T\in Q_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$d_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(S) = d_0(1,\mathbb{R},\mathbb{R})(T) = 1 > 0.$$

Weiterhin ist klar, daß dieses Beispiel auch allen übrigen Voraussetzungen von Satz 13.7 - mit Ausnahme der Forderung "$\dim(X)=\infty$" natürlich - genügt. Andererseits folgt aus

$$\forall x\in\mathbb{R}\,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda Tx - Sx = (\lambda-1)x$$

und Lemma 13.2(a) (mit $S_0:=S$ und $T_0:=T$)

$$\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)_0 \subset \Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0 = \{1\},$$

d.h. das Paar (T,S) besitzt keinen negativen VP bez. $\mathbb{R}$. Oberdies gilt hier trivialerweise sogar

$$\Gamma^{\mathbb{R}}(T,S)_0 = \Sigma_1^{\mathbb{R}}(T,S)_0 = \{1\}.$$

q.e.d.

Als Konsequenz ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 13.7, daß das φ-lokale Spektrum $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ des Paares (T,S) in Null bez. A nichtleer ist. Dies zeigen wir mit

Korollar 13.9. (Existenzsatz für φ-lokale Eigenwerte in Null)

Es sei die $\dim(X)=\infty$, $S,T:\Delta\to X^*$, S vollstetig, T halbstetig, beschränkt und ungerade, $S,T\in Q_0(\varphi,A,X^*)$ und $d_0(\varphi,A,X^*)(T)>0$. Ferner erfülle T die Bedingung (S). Dann folgt:

$$0\in\Sigma_\varphi^A(T,S)_0 \quad\text{oder}\quad \Sigma_\varphi^A(T,S)_0\cap\mathbb{R}^+\neq\phi\neq\Sigma_\varphi^A(T,S)_0\cap\mathbb{R}^-.$$

Beweis:

Ist $0\in\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$, so ist die Behauptung bewiesen. Andernfalls folgt aus $0\notin\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ sofort $d_0(\varphi,A,X^*)(S)>0$, und das Paar (T,S) besitzt nach Satz 13.7 einen positiven und einen negativen VP

bez. A. Diese wiederum sind Elemente des φ-lokalen Spektrums $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$, wie aus Lemma 13.2(a) (mit $S_0:=S$ und $T_0:=T$) folgt.

q.e.d.

Bemerkung 13.10.

Unter den Voraussetzungen von Korollar 13.9 ist die folgende Aussage *falsch*:

Entweder ist $0\in\Sigma_\varphi^A(T,S)_0$ oder $\Sigma_\varphi^A(T,S)_0\cap\mathbb{R}^+\neq\phi\neq\Sigma_\varphi^A(T,S)_0\cap\mathbb{R}^-$.

Beweis:

Wir geben ein Beispiel an. Es sei $X=X^*=A=\Delta$ der reelle LEBESGUE-Raum $(L^2([0,1]),\|\cdot\|_2)$, $\varphi(t):=t$ für $t\in\mathbb{R}_0^+$, y_0 ein festes Element aus X mit $\|y_0\|_2=1$ und

$$Sx := \begin{cases} \|x\|_2 \left|\sin\left(\frac{1}{\|x\|_2}\right)\right| y_0, & \text{falls } x\neq 0, \\ 0, & \text{falls } x=0 \end{cases}$$

sowie $Tx:=x$ für $x\in X$. Wie man nun sofort feststellt (vgl. den Beweis der Bemerkung 7.12), sind für diesen konkreten Fall sämtliche Voraussetzungen von Korollar 13.9 erfüllt. Insbesondere sind S und T Elemente aus $Q_0(1,X,X^*)$ und $d_0(1,X,X^*)(T)=1>0$. Andererseits wird für

$$x_n := \frac{y_0}{n\pi} \quad (n\in\mathbb{N})$$

die

$$\|x_n\|_2 = \frac{1}{n\pi}\|y_0\|_2 = \frac{1}{n\pi}, \quad Sx_n = 0 \quad (n\in\mathbb{N})$$

und also

$$0 \leq d_0(1,X,X^*)(S) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|Sx_n\|_2}{\|x_n\|_2} = 0,$$

d.h. $0\in\Sigma_1^X(T,S)_0$.

Betrachten wir jetzt weiter

$$u_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}y_0 \quad \text{bzw.} \quad v_n := -\frac{2}{(2n+1)\pi}y_0 \quad (n\in\mathbb{N}),$$

so folgt analog aus

$$1\cdot Tu_n - Su_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}y_0 - \frac{2}{(2n+1)\pi}y_0 = 0 \quad (n\in\mathbb{N})$$

bzw.

$$(-1)Tv_n - Sv_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}y_o - \frac{2}{(2n+1)\pi}y_o = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

überdies $\pm 1 \in \Sigma_1^X(T,S)_o$.

q.e.d.

Darüber hinaus erhalten wir abschließend ein Ergebnis über die Existenz von Eigenwerten (im üblichen Sinne) eines Paares (T,S) nichtlinearer Operatoren, wenn die in Satz 13.7 betrachteten Abbildungen zusätzlich gewisse Homogenitätseigenschaften besitzen. Genauer gilt das

Korollar 13.11. (Existenzsatz für Eigenwerte)

Es sei die $\dim(X) = \infty$, $r \in \mathbb{R}^+$, $B_r := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ und B_r eine Obermenge von $A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$.

Ferner seien $S,T: B_r \to X^*$, S vollstetig, T halbstetig, beschränkt und ungerade, $a \in \mathbb{R}^+$, $S,T \in Q_o(a,A,X^*)$, $d_o(a,A,X^*)(S) > 0$ und $d_o(a,A,X^*)(T) > 0$.
Erfüllt schließlich T die Bedingung (S) und gilt für jedes $t \in [0,1]$ und alle $x \in B_r$

$$S(tx) = t^a Sx \quad \text{sowie} \quad T(tx) = t^a Tx,$$

dann folgt:
$\sigma^A(T,S) \cap \mathbb{R}^+ \neq \phi \neq \sigma^A(T,S) \cap \mathbb{R}^-$.

Beweis:

Nach Satz 13.7 und Lemma 13.2(a) (mit $S_o := S$ und $T_o := T$) gibt es ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ und ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma_a^A(T,S)_o$. Der Beweis von Korollar 12.7 zeigt aber, daß unter den hier gemachten Voraussetzungen $\Sigma_a^A(T,S)_o \setminus \{0\} = \sigma^A(T,S) \setminus \{0\}$ ist.

q.e.d.

§ 14. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Abschließend möchten wir noch zu zwei Punkten einige Worte sagen. Zum einen geht es uns dabei um die Anwendbarkeit der lokalen Theorie des zweiten Kapitels auf nichtlineare Integralgleichungen, und zum anderen versuchen wir in einem kurzen Ausblick festzuhalten, an welchen Stellen die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Ergebnisse eventuell allgemeiner formuliert werden können.

Eine Anwendung unserer abstrakten lokalen Theorie auf nichtlineare Integralgleichungen ist natürlich grundsätzlich ebenso möglich, wie dies im achten Paragraphen für die globalen Resultate bereits durchgeführt wurde. Vor allem aus zwei Gründen haben wir jedoch darauf verzichtet. Einmal würde dadurch der Umfang dieser Arbeit noch einmal beträchtlich erweitert. Der zweite - und wichtigere - Grund ist der, daß eine solche Anwendung weder zusätzliche Probleme aufwerfen noch prinzipiell neue Erkenntnisse liefern würde. Vielmehr sind die dazu notwendigen Oberlegungen im wesentlichen schon im achten Abschnitt angestellt worden. So bedarf es beispielsweise (in allen anderen Fällen verfahre man ganz analog) nur geringer Modifikationen, um eine lokale Version von Satz 8.1 zu erhalten (welches einer Anwendung von Satz 12.1(a) entspricht): Mit den Vereinbarungen des § 8 gilt der

Satz 14.1. (Lokaler Satz vom FREDHOLM Typ)

Es sei $M\in\mathbb{R}$, $p,p_1,q,q_1,s\in(1,\infty)$, $r:=\max\{q_1,q\}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $p_1^{-1}+q_1^{-1}=1$, $r^{-1}+s^{-1}=1$, $k:G\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die CB und

$$\exists h\in L^r(G\times G)\,\forall(x,y,u)\in G\times G\times\mathbb{R}:\quad |k(x,y,u)|\leq|h(x,y)|\,|u|^{p/p_1}.$$

Weiter sei $R\in\mathbb{R}^+$, $B_R:=\{u\in L^p(G)\mid \|u\|_p\leq R\}$, $T,T_0:B_R\to L^q(G)$ halbstetig und beschränkt, T_0 sei ungerade, und für jedes $t\in[0,1]$ erfülle die Abbildung $T+t(T_0-T):B_R\to L^q(G)$ die Bedingung (S), $T,T_0\in Q_0(p\text{-}1,B_R,L^q(G))$, $T-T_0\in N_0(p\text{-}1,B_R,L^q(G))$ und $d_0(p\text{-}1,B_R,L^q(G))(T_0)>0$.

ist dann noch $g:B_R \to \mathbb{R}$ eine vollstetige Funktion mit

$$(14.1) \qquad \liminf_{t \to 0}^{[0,R]} \left(\sup_{\|u\|_p = t}^{L^p(G)} |g(u)| t^{\frac{p}{p_1}-(p-1)} - M \right) = 0$$

und $S:B_R \to L^q(G)$ definiert durch

$$\forall u \in B_R \, \forall x \in G: \quad [Su](x) := g(u) \int_G k(x,y,u(y)) \, dy,$$

so folgt:

Es gibt eine Teilmenge A von B_R mit $0 \in A \cap \overline{A \setminus \{0\}}$ und

(a) $S \in Q_0(p-1, A, L^q(G))$.

(b) Für jedes λ aus einer unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R} \setminus (\Sigma^A_{p-1}(T_0,S)_0 \cup \{0\})$ ist die Abbildung $\lambda T - S : B_R \to L^q(G)$ gleichmäßig (p-1)-lokal regulär surjektiv in Null bez. A.

(c) $\forall \lambda \in \Sigma^A_{p-1}(T_0,S)_0: \quad |\lambda| \leq \dfrac{|M| \cdot \|h\|_r}{d_0(p-1, A, L^q(G))(T_0)} |G|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}$.

Beweis:

Mit Satz 12.1(a) analog zum Beweis von Satz 8.1.

q.e.d.

Kann als Sonderfall in (14.1) speziell M=0 gesetzt werden, so ist $\Sigma^A_{p-1}(T_0,S)_0 \cup \{0\} = \{0\}$, und man erhält die lokale Surjektivität in Null von $\lambda T - S : B_R \to L^q(G)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Darüber hinaus ist die Bedingung (14.1) insbesondere für $g \equiv 1$, $p/p_1 > p-1$ und M=0 sowie $g \equiv 1$, $p/p_1 = p-1$ und M=1 erfüllt.

Überlegen wir uns nun, inwieweit die hier erzielten Ergebnisse gegebenenfalls verallgemeinert werden können, so besteht der erste Schritt in dieser Richtung wohl in dem Verzicht auf die Separabilität des zugrundeliegenden Raumes X (wodurch allerdings - wie wir in § 8 gesehen haben - die Anwendungsmöglichkeiten auf nichtlineare Integralgleichungen nicht erweitert würden). Dies betrifft in erster Linie die Lemmata 5.1, 7.7 und 7.8 sowie den Satz 5.2 und erscheint uns durchaus realisierbar. Denn hierin liegt aller Erfahrung nach lediglich ein beweistechnisches und kein grundsätzliches Problem begründet

(vgl. u.a. [13], [21], [22], [24], [38] und [54]).

In einem zweiten Schritt wäre dann zu untersuchen, ob die im Text für gewisse Abbildungen vorausgesetzte Vollstetigkeit abgeschwächt werden kann (Verallgemeinerungen von vollstetigen Operatoren werden u.a. behandelt in [7], [8], [17], [48], [49], [50], [57], [58], [59], [61], [68], [71], [75] und [76]). Unter Beibehaltung von Satz 5.2 ergibt sich hieraus im Zusammenhang mit den §§ 6 und 12 vor allem die Frage, für welche - nicht notwendigerweise kompakte - Abbildungen S die Summe T+S der Bedingung (S) genügt, wenn auch die Abbildung T diese Bedingung erfüllt (benötigt wird also eine allgemeinere Version von Lemma[1.2] in [77], S.19). Zusätzlich müßte in den §§ 7 und 13 die Aussage (7.12), d.h.

$$\overline{S(\Omega)} \supset \{y \in X^* \mid \|y\| \leq M\}$$

($\Omega \subset X$ beschränkt, X unendlichdimensional, $M \in \mathbb{R}^+$), ohne die Vollstetigkeit von S zu einem Widerspruch geführt oder durch ein anderes Argument ersetzt werden (vgl. den Beweis von Lemma 7.8).

LITERATURVERZEICHNIS

1. ALDARWISH,A., A.LANGENBACH : Lösung des asymptotischen Bifurkationsproblems für parametrische Gleichungen, Math. Nachr. 65, 47-58 (1975).

2. BROWDER,F.E. : Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type, 425-500 in E.H.Zarantonello (Editor) "Contributions to nonlinear functional analysis", Academic Press, New York 1971.

3. CRONIN,J. : Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Amer. Math. Soc., Providence 1964.

4. DEIMLING,K. : Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1974.

5. DUNFORD,N., J.T.SCHWARTZ : Linear operators I,II,III, Interscience Publishers, Inc., New York 1958,1963,1971.

6. EDWARDS,R.E. : Functional analysis, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York 1965.

7. FITZPATRICK,P.M., W.V.PETRYSHYN : Positive eigenvalues for nonlinear multivalued noncompact operators with applications to differential operators, J. Diff. Equat. 22, 428-441 (1976).

8. FITZPATRICK,P.M., W.V.PETRYSHYN : On the nonlinear eigenvalue problem $T(u)=\lambda C(u)$, involving noncompact abstract and differential operators, Bollettino U.M.I. (5) 15-B, 80-107 (1978).

9. FRIEDMAN,A. : Foundations of modern analysis, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York 1970.

10. FUČIK,S. : Fredholm alternative for nonlinear operators in Banach spaces and its applications to differential and integral equations, Comment. Math. Univ. Carolinae 11, 271-284 (1970).

11. FUČIK,S. : Note on the Fredholm alternative for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolinae 12, 213-226 (1971).

12. FUČIK,S., J.NEČAS, SOUČEK,J., V.SOUČEK : Note to nonlinear spectral theory: Application to the nonlinear integral equations of the Lichtenstein type, Math. Nachr. 58, 257-267 (1973).

13. FUČIK,S., J.NEČAS, SOUČEK,J., V.SOUČEK : Spectral analysis of nonlinear operators, Lect. Notes 346, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1973.

14. FURI,M., A.VIGNOLI : A nonlinear spectral approach to surjectivity in Banach spaces, J. Funct. Analys. 20, 304-318 (1975).

15. FURI,M., A.VIGNOLI : On surjectivity for nonlinear maps in Banach spaces, Annali Mat. Pura Appl. (4) 112, 205-216 (1977).

16. FURI,M., A.VIGNOLI : Spectrum for nonlinear maps and bifurcation in the non differentiable case, Annali Mat. Pura Appl. (4) 113, 265-285 (1977).

17. FURI,M., M.MARTELLI, VIGNOLI,A. : Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spaces, Annali Mat. Pura Appl. (4) 118, 229-294 (1978).

18. GEORG,K., M.MARTELLI : On spectral theory for nonlinear operators, J. Funct. Analys. 24, 140-147 (1977).

19. GRANAS,A. : Über eine Klasse nichtlinearer Abbildungen in Banachschen Räumen, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl.III, Vol.V, No.9, 867-871 (1957).

20. GROTEMEYER,K.P. : Topologie, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1969.

21. HESS,P. : Nonlinear functional equations in Banach spaces and homotopy arguments, Bull. Amer. Math. Soc. 77, 211-215 (1971).

22. HESS,P. : Nonlinear functional equations and eigenvalue problems in nonseparable Banach spaces, Comm. Math. Helv. 46, 314-323 (1971).

23. HESS,P. : On the Fredholm alternative for nonlinear func-

tional equations in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 33, 55-61 (1972).

24. HESS,P. : On nonlinear mappings of monotone type homotopic to odd operators, J. Funct. Analys. 11, 138-167 (1972).

25. HETZER,G. : Bifurcation theorems of Rabinowitz type, Nonlinear Analysis 1, 471-479 (1976/77).

26. HETZER,G., V.STALLBOHM : Eine Existenzaussage für asymptotisch lineare Störungen eines Fredholmoperators mit Index 0, Manuscripta Math. 21, 81-100 (1977).

27. HETZER,G., V.STALLBOHM : Global behavior of bifurcation branches and the essential spectrum, Math. Nachr. 86, 347-360 (1978).

28. HIRZEBRUCH,F., W.SCHARLAU : Einführung in die Funktionalanalysis, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1971.

29. IANNACCI,R. : The spectrum for nonlinear multi-valued maps via approximations, Bollettino U.M.I. (5) 15-B, 527-545 (1978).

30. KAČUROVSKII,R.I. : On Fredholm theory for nonlinear operator equations, Soviet Math. Dokl. 11, 751-754 (1970).

31. KELLER,J.B., S.ANTMAN (Editors) : Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, W.A.Benjamin, Inc., New York 1969.

32. KOWALSKY,H.J. : Lineare Algebra, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1970.

33. KRASNOSELSKII,M.A. : Some problems of nonlinear analysis, Amer. Math. Soc. Translations 10, Series 2, 345-409 (1958).

34. KRASNOSELSKII,M.A. : Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press Ltd., Oxford 1964.

35. KRASNOSELSKII,M.A., J.B.RUTICKII : Convex functions and Orlicz spaces, P.Noordhoff Ltd., Groningen 1961.

36. KRASNOSELSKII,M.A., J.B.RUTICKII : Orlicz spaces and nonlinear integral equations, Amer. Math. Soc. Translations 60, Series 2, 51-115 (1967).

37. KRASNOSELSKII,M.A., et al. : Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff International Publishing, Leyden 1976.

38. KUČERA,M. : Fredholm alternative for nonlinear operators, Comment. Math. Univ. Carolinae 11, 337-363 (1970).

39. KUČERA,M. : Theory of nonlinear operators, Proceedings of a Summer School, Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences / Academic Press, Prague / New York 1973.

40. LALOUX,B., J.MAWHIN : Multiplicity, Leray-Schauder formula, and bifurcation, J. Diff. Equat. 24, 309-322 (1977).

41. LEV,A. : Branching of solutions of equations in Banach spaces without multiplicity assumptions, Proc. London Math. Soc. 37, 308-341 (1978).

42. MACBAIN,J.A. : Global bifurcation theorems for noncompact operators, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 1005-1009 (1974).

43. MACBAIN,J.A. : Global bifurcation theorems for nonlinearly perturbed operator equations, Bull. Amer. Math. Soc. 82, 584-586 (1976).

44. MACBAIN,J.A. : Local and global bifurcation from normal eigenvalues, Pacific J. Math. 63, 445-466 (1976).

45. MACBAIN,J.A. : Local and global bifurcation from normal eigenvalues II, Pacific J. Math. 74, 143-152 (1978).

46. MARSDEN,J.E. : Qualitative methods in bifurcation theory, Bull. Amer. Math. Soc. 84, 1125-1148 (1978).

47. MARTENSEN,E. : Analysis V, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1972.

48. MILOJEVIĆ,P.S. : Some generalizations of the first Fredholm theorem to multivalued condensing and A-proper mappings, Bollettino U.M.I. (5) 13-B, 619-633 (1976).

49. MILOJEVIĆ,P.S. : Some generalizations of the first Fredholm theorem to multivalued A-proper mappings with applications to nonlinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 65, 468-502 (1978).

50. MILOJEVIĆ,P.S., W.V.PETRYSHYN : Continuation theorems and the approximation-solvability of equations involving multivalued A-proper mappings, J. Math. Anal. Appl. 60, 658-692 (1977).

51. MININNI,M. : Coincidence degree and solvability of some nonlinear functional equations in normed spaces: A spectral approach, Nonlinear Analysis 1, 105-122 (1976/77).

52. MININNI,M. : A spectral approach to local solvability of some nonlinear equations in normed spaces, Nonlinear Analysis 2, 597-607 (1978).

53. NASHED,M.Z. : Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis, 103-309 in L.B.Rall (Editor) "Nonlinear functional analysis and applications", Academic Press, New York 1971.

54. NEČAS,J. : Remark on the Fredholm alternative for nonlinear operators with application to nonlinear integral equations of generalized Hammerstein type, Comment. Math. Univ. Carolinae 13, 109-120 (1972).

55. NUSSBAUM,R.D. : A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations, J. Funct. Analys. 19, 319-338 (1975).

56. PETRY,W. : Nonlinear eigenvalue problems, Comment. Math. Univ. Carolinae 14, 113-126 (1973).

57. PETRY,W. : Existence theorems for a class of nonlinear operator equations, J. Math. Anal. Appl. 43, 250-260 (1973).

58. PETRYSHYN,W.V. : Fredholm alternatives for nonlinear A-proper mappings with applications to nonlinear elliptic boundary value problems, J. Funct. Analys. 18, 288-317 (1975).

59. PETRYSHYN,W.V. : Fredholm alternative for nonlinear k-ball-contractive mappings with applications, J. Diff. Equat. 17, 82-95 (1975).

60. PETRYSHYN,W.V. : Note on the solvability of equations involving unbounded linear and quasibounded nonlinear

operators, J. Math. Anal. Appl. 56, 495-501 (1976).

61. PETRYSHYN,W.V. : Bifurcation and asymptotic bifurcation for equations involving A-proper mappings with applications to differential equations, J. Diff. Equat. 28, 124-154 (1978).

62. PIMPLEY,G.H. : Eigenfunction branches of nonlinear operators and their bifurcations, Lect. Notes 104, Springer-Verlag, Berlin 1969.

63. RABINOWITZ,P.H. : Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Analys. 7, 487-513 (1971).

64. RABINOWITZ,P.H. : Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, Rocky Mount. J. Math. 3, 161-202 (1973).

65. RABINOWITZ,P.H. : On bifurcation from infinity, J. Diff. Equat. 14, 462-475 (1973).

66. SCARPELLINI,B. : On certain nonlinear eigenvalue problems, Math. Nachr. 77, 373-390 (1977).

67. SCHMITT,K., H.L.SMITH : On eigenvalue problems for nondifferentiable mappings, J. Diff. Equat. 33, 294-319 (1979).

68. STUART,C.A. : Some bifurcation theory for k-set contractions, Proc. London Math. Soc. 27, 531-550 (1973).

69. STUART,C.A. : Solutions of large norm for nonlinear Sturm-Liouville problems, Quart. J. Math. 24, 129-139 (1973).

70. TAYLOR,A.E. : Introduction to functional analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York 1958.

71. THOMAS,J.W. : A bifurcation theorem for k-set contractions, Pacific J. Math. 45, 749-756 (1973).

72. TURNER,R.E.L. : Nonlinear eigenvalue problems with applications to elliptic equations, Arch. Rational Mech. Anal. 42, 184-193 (1971)

73. VAINBERG,M.M. : Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, Inc., San Francisco 1964.

74. VAINBERG,M.M., V.A.TRENOGIN : Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff International Publishing, Leyden 1974.

75. WEBB,J.R.L. : Remarks on k-set contractions, Bollettino U.M.I. (4) 4, 614-629 (1971).

76. WEBB,J.R.L. : A fixed point theorem and applications to functional equations in Banach spaces, Bollettino U.M.I. (4) 4, 775-788 (1971).

77. WEBER,H. : Zur Fredholmschen Alternative für nichtlineare Operatoren und ihre Anwendung auf Urysonsche Integralgleichungen, Diplomarbeit, angefertigt am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf, Düsseldorf 1977.

78. WEGNER,B. : Ein globales Ergebnis für Bifurkationsaufgaben mit schwach differenzierbaren Operatoren, Math. Nachr. 87, 7-14 (1979).

79. WEYER,J. : Regularität in der nichtlinearen Spektraltheorie, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 83A, 81-91 (1979).

80. YOSIDA,K. : Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1968.

81. ZAANEN,A.C. : Linear analysis, North-Holland Publishing Co. / P.Noordhoff N.V., Amsterdam / Groningen 1964.

82. ZABREYKO,P.P., et al. : Integral equations, Noordhoff International Publishing, Leyden 1975.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Petry, der mir einen bedeutenden Teil meiner mathematischen Kenntnisse vermittelte und mir darüber hinaus die Anfertigung dieser Arbeit ermöglichte.

Herrn Prof. Dr. B. Döring danke ich für das bekundete Interesse und die freundliche Übernahme des Korreferats.

Lebenslauf

Name:	Horst Werner Weber
Geburtstag:	27. Juni 1950
Geburtsort:	Leverkusen
Eltern:	Helmut Otto Weber Anna Josefine Weber, geb. Dhein
Familienstand:	seit dem 28. Dezember 1978 verheiratet mit Dagmar Weber, geb. Petter

Ausbildung:

1956 - 1960	Besuch der Gemeinschaftsschule am Bayerwerk in Leverkusen
1960 - 1966	Besuch der Realschule am Stadtpark in Leverkusen
1966 - 1969	Elektromechanikerlehre bei der Bayer AG in Leverkusen Facharbeiterprüfung am 21. März 1969 bis zum 31. August Elektromechaniker bei der Bayer AG in Leverkusen
1969 - 1972	Studium der Elektrotechnik an der Fachhochschule Siegen-Gummersbach in Gummersbach im Ausbildungsbereich Energieelektronik Ingenieurprüfung (grad.) am 20. Juni 1972
1972 - 1977	Studium der Mathematik mit Wahlfach Theoretische Physik an der Universität Düsseldorf Diplomprüfung am 17. November 1977
1977 - 1979	Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf
seit 1979	Wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf